

Uppgifter som redskap för mediering av kritiska aspekter i matematikundervisning

J Fred & J Stjernlöf

Artikeln beskriver resultaten från ett forsknings- och utvecklingsprojekt som verkat inom ramen för Stockholms stads satsning på lärardriven forskning. I projektet har Learning study använts som modell med variationsteorin som teoretiskt ramverk. Learning studien genomfördes i en årskurs två med avsikten att utforska vilka aspekter i relation till den givna elevgruppen som framstår som avgörande för deras lärande avseende att utveckla förmågan att urskilja och beskriva mönster i talföljder samt hur uppgifter kan fungera som redskap för att mediera kritiska aspekter.

Studiens resultat pekar ut följande aspekter som avgörande, det vill säga kritiska: veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras och som används för att bestämma okända element i talmönstret; veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt samt urskilja relationen mellan talföljdens olika delar och hur de förhåller sig till varandra och till helheten.

Vidare indikerar resultaten att uppgiftens konstruktion avseende frågeställningens öppenhet och variationsmönster kan ha betydelse för på vilka sätt en uppgift fungerar som redskap för att mediera kritiska aspekter. Dessutom har studien visat på att iscensättningen av variationsmönster avseende hur uppgiften presenteras samt hur läraren tar tillvara inspel och resonemang från eleverna har betydelse.

Nyckelord: talmönster, mönster i talföljder, Learning study, kritiska aspekter, variationsteori, mediering, iscensättning, uppgiftskonstruktion



Johanna Stjernlöf (t v) är utbildad grundskollärare och var förstelärare i matematik på Ekensbergsskolan i Stockholm när artikeln skrevs. Nu arbetar hon som samordnare och utvecklingsledare i Ekerö kommun och är även handledare i Matematiklyftet.

Jenny Fred är utbildad förskollärare och lärare. Hon arbetar som lärare på Ekensbergsskolan i Stockholm.

När studien genomfördes ingick Jenny och Johanna i ett ämnesdidaktiskt nätverk samordnat av STLS (Stockholm Teaching and Learning Studies). Både Jenny och Johanna har erfarenhet av att leda Learning studies

Introduktion

HÖSTEN 2012 INLEDDES ett undervisningsutvecklande projekt inom ramen för Stockholms stads FoU-satsning. Projektets övergripande syfte avsåg att implementera Lgr 11 samt att ytterligare fördjupa skolans arbete med att utveckla matematikundervisningen med Learning study som modell. Som en del i projektet ämnade vi påbörja en uppgiftsbank med uppgifter som skulle kunna utgöra redskap för såväl utveckling av elevers förmågor som bedömning av dessa.

Ekensbergsskolan har sedan 2011 arbetat med Learning study som modell, med huvudsyfte att kollegialt utveckla undervisningen i matematik samt att stärka lärarnas ämnesdidaktiska kompetens. I tidigare genomförda studier har vi funnit den iterativa design en Learning study erbjuder framgångsrik ur aspekten att utveckla en fördjupad förståelse av hur undervisningen kan åstadkomma bättre förutsättningar för lärande inom specifika kunskapsområden. Undervisningen ska enligt skollagen vila på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet vilket skapar krav på nya sätt att tänka kring lärarprofessionen och professionsutvecklingen. Mot bakgrund av detta bör, enligt I. Carlgren (2012), I. Eriksson (2013) och U. Runesson (2012), ett större fokus ligga på praktikutvecklande forskning med utgångspunkt i problem identifierade av lärare. Learning study har med sin tydligt tidsmässiga avgränsning och sin fokusering på mer precisa frågeställningar lyfts fram som en potentiell modell i skapandet av lärares professionella kunskapsbas (Eriksson 2013; Runesson 2012).

Resultaten och analyserna av TIMSS 2007 och 2011 pekar ut algebra som ett av de huvudområden vari svenska elever har svårigheter (Skolverket 2008; Skolverket 2012). Under studiens gång har det även kommit andra rapporter, PISA 2012 och UiM 2013, (PRIM-gruppen 2013; Skolverket 2013a), vilka stödjer detta resonemang. Algebra och mönster har fått en mer framskjuten plats i kursplanen och står nu som ett eget kunskapsområde under centralt innehåll redan för de lägre årskurserna. Vår erfarenhet är att mönster i talföljder inte i tillräcklig utsträckning ges utrymme och uppmärksamhet i undervisningen. Detta anser vi oss finna stöd för i TIMSS 2007, som lyfter fram algebra som en förlorare i förhållande till andel tid som läggs på respektive matematikinnehåll i undervisningen (Skolverket 2008). Vi funderar över om en bidragande orsak till detta kan vara att lärare inte har tillräckligt med kunskap om vad detta kunnande innebär i årskurs 1–3, det vill säga vad som är kritiskt för att eleverna ska utveckla förmågan att kunna urskilja och beskriva mönster i talföljder.

Tidigare forskning

I studien gjordes en innehållsmässig avgränsning vad beträffar mönster i matematik till mönster i talföljder. Med mönster i talföljder avses en följd av tal som förändras på ett regelbundet sätt. Kiselman & Mouwitz (2008) definierar begreppet talföljd till "en följd av tal" (s. 112) samt menar att begreppet följd innebär att elementen i en följd har en ordning men inte nödvändigtvis någon regelbundenhet. Därav följer att ordet talföljd inte behöver innebära att talen följer en viss regelbundenhet, det vill säga en talföljd kan också vara ett antal tal vilka som helst angivna i en viss ordning, till exempel 17, 11, 23, 35, 37, 4. Oftast talar vi dock i matematik om talföljder som följer av

tal som förändras enligt en bestämd regelbundenhet.

För att precisera enligt vilken typ av regelbundenhet en talföljd är uppbyggd så används i artikeln aritmetiska respektive geometriska talföljder. Aritmetiska talföljder definieras som en talföljd där differensen mellan ett tal och närmast föregående tal alltid är lika stor, exempelvis 3, 6, 9, 12, 15. I geometriska talföljder är kvoten av ett tal och närmast föregående tal (förutom det första talet) konstant. Ett exempel på en sådan talföljd är 1, 2, 4, 8, 16 (Kiselman & Mouwitz 2008). Enligt Liljedahl (2004) är ett mönster i en talföljd alltid beroende av talens värde. Med det menas att exempelvis 1, 3, 5, 1, 3, 5, inte är ett talmönster då siffrorna skulle kunna bytas ut mot former eller andra föremål, det vill säga talens värde är inte av betydelse för hur mönstret fortsätter. Dessa slags mönster benämns i litteraturen som upprepat mönster (ibid). 1, 3, 5, 1, 3, 5 är då ett upprepat mönster med tal.

I studien användes begreppet talmönster uteslutande i lektioner och för/eftertest. Detta val grundades på hur diagnosmaterialet Diamant (Skolverket 2013b) använder begreppet i elevuppgifterna samt på att begreppet talmönster användes i elevernas aktuella läromedel.

I artikeln har vi valt att använda tre olika begrepp; mönster, talmönster samt talföljder. Då begreppet mönster används avses även andra slags mönster än mönster i talföljder, till exempel geometriska mönster och upprepade mönster. Talmönster används som samlingsbegrepp för talföljder som har en viss regelbundenhet samt visuella talmönster (se till exempel Ekdahl 2012). I studien var avsikten att eleverna skulle kunna urskilja skillnaden mellan talföljder som är konstruerade enligt ett mönster och talföljder som inte är det. Vi har i dessa fall valt att kalla talföljder som inte är konstruerade enligt någon regel (t.ex. 17, 11, 23, 35, 37, 4) för en talrad.

Mönster förespråkas av flera forskare att användas som introduktion till algebra då två viktiga aspekter inom algebra är just mönster och generaliseringar av dessa (Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall 1998; Mason 1996). "Pattern and generalization are both thought to be fundamental to mathematics and are therefore important in mathematics education." (Hargreaves et al 1998, s. 315) Betydelsen av att kunna generalisera regelbundenheter genom att beskriva dem med ord betonas. För att generellt beskriva talföljden 1, 3, 5, 7, 9 räcker det till exempel inte med att säga att "det är udda tal". Ett första led i att generalisera innebär här att kunna uttrycka att det är en konstant ökning med två eller att skillnaden mellan talen är två. Nästa steg är sedan att jämföra detta med talens plats i mönstret (ibid). Olteanu (2013) menar att generaliseringar handlar om att kunna göra jämförelser mellan olika objekt och söka det generella i det specifika. Att kunna generalisera handlar alltså inte endast om att uttrycka mönsterutvecklingen algebraiskt, vilket kanske är den tolkning som vanligtvis ligger närmast till hands när man talar om generaliseringar inom området mönster. Elever i tidigare skolår har enligt Olteanu förmågan att kunna utveckla ett generellt tänkande om de ges möjlighet till detta i undervisningen och framhåller samtidigt vikten av lärarens medvetenhet att i undervisningen om mönster arbeta för att eleverna ska utveckla förmågan att generalisera.

Ekdahl (2013) poängterar att undervisningen måste ge eleverna erfarenheter av att

resonera kring och beskriva olika talföljder. Vidare betonas att det inte är tillräckligt med lösryckta undervisningssekvenser som handlar om att fortsätta påbörjade mönster och fylla i saknade tal. Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik beskriver den tänkta progressionen för hur man kan arbeta med mönster och hur de till en början kan uttryckas med ord och bilder, för att sedan övergå till symbolspråk och algebraiska uttryck. Här tydliggörs också vikten av att det är i arbetet med mönster i de tidiga skolåren som grunden läggs för att kunna uttrycka och beskriva mönster generellt med hjälp av algebra (Skolverket 2011).

För att få syn på vilka förutsättningar som är av vikt för att på sikt kunna beskriva regelbundenheter algebraiskt behöver vi titta närmare på vad tidigare forskning kan berätta om vilka svårigheter som kan uppstå.

Warren och Cooper (2007) lyfter fram att undervisningsmaterial i de tidigare skolåren ofta presenterar mönster som upprepade sekvenser, vilket de tolkar som att de svårigheter som elever kan utveckla beror på att de saknar erfarenheter av andra typer av mönster. Papic (2007) menar istället att undervisning om upprepade mönster tenderar att innehålla och stanna vid aktiviteter där elever får fortsätta på mönster i stället för att fokusera på att urskilja vad som utgör mönstrets upprepning samt ge tillfälle att resonera om och generalisera mönsterutveckling. Eleverna kan därför ha svårigheter även med andra typer av mönster. Något äldre elever tenderar att fastna i att mönster i talföljder alltid består av tal med en konstant skillnad emellan, (t.ex. 3, 6, 9, 12 osv.) och att de strategier eleverna använder när de ska upptäcka regelbundenheten för att kunna fortsätta en talföljd kan härledas till denna uppfattning (Hargreaves et al 1998).

Flera studier pekar på att elever har svårare att beskriva och förklara mönster än att fortsätta på dem (Hargreaves et al 1998; Warren 2005; Warren & Cooper 2007). Warren (2005) menar att avsaknaden av matematiskt språk och svårigheter att mer precist kunna beskriva relationer och mönsterutveckling utgör hinder för eleverna. Vidare visar Warrens studier att elever har svårare att beskriva mönster skriftligt än att beskriva dem muntligt. Warren & Cooper (2007) ger även exempel på att elever endast tar hänsyn till en del av den påbörjade talföljden och inte ser till helheten. Ekdahl (2012) har genom en fenomenografisk studie av elevers uppfattningar om talmönster i årskurs 3 och 4 urskilt kritiska aspekter, det vill säga aspekter som antas vara avgörande för elevers lärande avseende talmönster. Aspekterna som urskildes handlade om att kunna se att talmönster inte alltid är uppbyggda som en konstant skillnad utan istället öppna upp för andra typer av regelbundenheter, att kunna urskilja hur delarna i mönstret förhåller sig till varandra och till helheten, att kunna se förbi den angivna helheten samt att kunna urskilja att förhållandet mellan mönstrets olika delar kan variera. Dessa kritiska aspekter, tillsammans med den övriga forskning som nämnts, utgjorde grunden för våra antaganden om möjliga kritiska aspekter.

Det finns studier som uppmärksammar att på det vis de uppgifter som används i undervisningen iscensätts, det vill säga hur de tar form både materiellt och i kommunikation då de används av elever och lärare, har betydelse för vad som görs möjligt att lära (Lindberg 2010). Lindberg framhåller hur uppgifter bör ”skapa ett behov av

Fred & Stjernlöf

kunskapande hos eleverna, vilket gör att flera aspekter av uppgifterna måste planeras med avseende på vad man vill att de ska åstadkomma snarare än vad eleverna (eller läraren) ska göra” (ibid s.12). Vidare påvisar Lindbergs studie uppgifters betydelse för hur lärandet iscensätts och framhåller att uppgifterna därför även bör utgöra utgångspunkt för analys av undervisning. Med utgångspunkt i detta väcktes intresset för att utforska vilken funktion en uppgiftskonstruktion med inbyggda variationsmönster i den skrivna uppgiften får i undervisningen avseende möjliggörandet av en urskiljning av så kallade kritiska aspekter samt vilket lärande som kan åstadkommas.

Lärandeobjekt och syfte

Lärandeobjektet i studien definierades till ”att utveckla förmågan att urskilja och beskriva mönster i talföljder”. Detta tog utgångspunkt i tidigare forskning som lyfts fram i artikelns forskningsöversikt samt i de problem som uppstod i klassrumspraktiken då lärarna ställdes inför de nya formuleringarna i Lgr 11. Forskningen belyser förmågan att beskriva och generalisera regelbundenheter som ett led i att utveckla ett algebraiskt tänkande (Hargreaves et al 1998; Mason 1996). Eftersom detta undervisningsområde i och med den nya kursplanen var relativt nytt i årskurs 1–3 hade lärarna förhållandevis liten undervisningserfarenhet beträffande mönster i talföljder och vad detta område innebär i ett algebraiskt sammanhang. Vidare fann vi få tidigare studier om vad detta kunnande kan innebära i de lägre åldrarna.

Ett av vår skolas utvecklingsområden handlade om att utveckla undervisningen för att med hjälp av uppgifter få syn på elevernas kunnande. Vi ämnade därför undersöka uppgifternas roll och betydelse i undervisningen och för elevernas lärande inom ramen för den Learning study som genomfördes.

Studiens övergripande syfte var att bidra med ny och fördjupad ämnesdidaktisk kunskap samt utforska hur uppgifter kan betraktas som redskap för mediering av ett undervisningsinnehåll. Med utgångspunkt i detta formulerades följande frågeställningar:

- Vilka är de kritiska aspekterna för att utveckla förmågan att urskilja och beskriva mönster i talföljder?
- På vilka sätt fungerar uppgifterna som ett redskap för att mediera de kritiska aspekterna?

Artikelns syfte är att beskriva resultaten av studien med dessa två frågeställningar som utgångspunkt i förhållande till den genomförda learning studien.

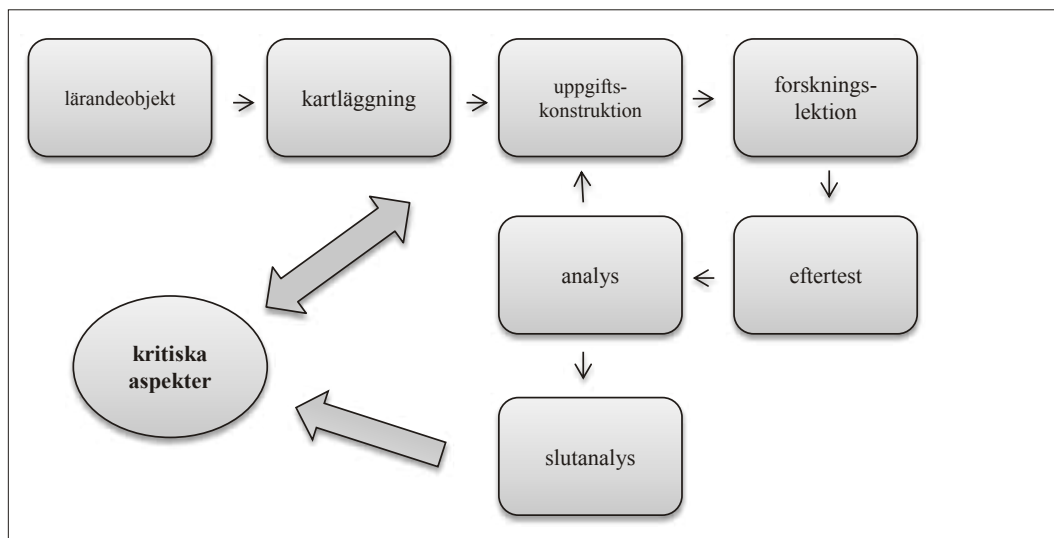
Material och metod

I den här delen beskrivs den Learning study som legat till grund för studien samt hur datamaterial samlats in och analyserats.

En Learning study genomfördes i årskurs 2 i en grundskola i Stockholm. Learning study är en modell för en kollegial och systematisk utveckling av undervisning med elevers lärande/kunskapsutveckling i fokus med sina rötter i den japanska modellen Lesson study (Eriksson 2013; Runesson 2012). Learning studien genomfördes i tre

cykler innehållande tre forskningslektioner i tre skilda grupper. I studien ingick 40 elever och lärargruppen utgjordes av fyra lärare. Variationsteorin användes i studien som teoretiskt ramverk samt som redskap för uppgiftskonstruktion och analys. Enligt variationsteorin tar lärandemiljön sin utgångspunkt i en aktuell elevgrupps tidigare kunskaper och förmågor (Marton, Runesson & Tsui 2004). Vidare stödjer sig teorins fundamentala grund på begreppen urskiljning, variation och samtidighet med innebörden att lärandet bygger på att se något på ett nytt sätt. För att en urskiljning av nya aspekter ska ske krävs en innehållslig variation där det som varierar och det som hålls invariant fokuseras samtidigt (Marton & Booth 2000). De planerade variationsmönstren anses ur ett variationsteoretiskt perspektiv skapa förutsättningar för att eleverna ska ges möjlighet att urskilja de så kallade kritiska aspekterna och därmed utveckla utvald förmåga och/eller kunskap (Marton, Runesson & Tsui 2004).

Studien skiljer sig i två avseenden från hur en Learning study traditionellt genomförs. Vanligtvis genomförs en Learning study under en termin men vår studie har genomförts under ett helt läsår. Vidare har fokus varit på de uppgifter som används i lektionen snarare än lektionen i sig. Vårt intresse låg i att undersöka hur uppgifter kan fungera som ett redskap för mediering av ett undervisningsinnehåll. Utgångspunkten har här varit den sociokulturella teorins centrala antaganden om att vi alltid erfar och hanterar vår värld med hjälp av olika redskap som till exempel begrepp, modeller eller fysiska redskap. Redskapen kan således sägas tolka världen åt oss (Säljö 2000). Uppgiften som redskap i undervisningen kan därmed mediera, hjälpa oss att förstå och tolka, ett innehåll som ska läras och förstås.



Struktur för studiens Learning study-cykel

Inledningsvis definierades och avgränsades ett lärandeobjekt. Ett lärandeobjekt tar sin utgångspunkt i något som upplevs skapa problem i elevernas lärande och i undervisningen. Det kan röra sig om något som lärarna upplever svårt att undervisa om och/eller något som eleverna upplevs ha svårt att förstå. Lärandeobjektet utvecklas i samspel med en specifik elevgrupp och ” ... avser den specifika förmåga i förhållande

till ett innehåll, som läraren hoppas att eleverna skall utveckla och/eller förstå och ska alltså inte likställas med ett lärandemål vilket är av mer generell art” (Wernberg 2009, s. 15).

När denna avgränsning var gjord identifierades lärandeobjektets möjliga kritiska aspekter, det vill säga ”... sådana aspekter av lärandeobjektet som i relation till en given elevgrupp framstår som avgörande för deras lärande” (Carlgren & Eriksson 2012, s. 3). Denna identifiering skedde med utgångspunkt i tidigare forskning och studier om talmönster. Med utgångspunkt i dessa möjliga kritiska aspekter genomfördes en kartläggning för att få en förståelse för elevgruppens aktuella kunskaper och uppfattningar om lärandeobjektet. Kartläggningen bestod av ett skriftligt förtest samt efterföljande intervjuer.

Efter genomförd kartläggning reviderades de kritiska aspekterna vilka sedan utgjorde utgångspunkt för uppgiftskonstruktion och lektionsplanering. I uppgiftskonstruktionen användes variationsmönster som ett redskap för att synliggöra de kritiska aspekterna. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv avser variation en innehållslig, medveten, riktad och systematisk variation. En uppgift som konstrueras för att synliggöra kritiska aspekter bör konstrueras så att den/de kritiska aspekterna av lärandeobjektet som ska urskiljas framträder. Detta med hjälp av ett medvetet val av dels innehållsmässig variation av aspekter av lärandeobjektet, dels en riktad frågeställning där eleverna genom frågeställningen måste uppmärksamma dessa aspekter. I forskningslektionerna byggdes olika dimensioner av variation in i uppgifterna för att eleverna till exempel skulle urskilja en ny innebörd av en talföljd. Detta med utgångspunkt i: vilka kritiska aspekter eleverna skulle urskilja, vilket variationsmönster som bäst skulle möjliggöra detta urskiljande, vilka talföljder som bäst kunde skapa denna variation samt vad som behövde efterfrågas i uppgiften för att variationen skulle iscensättas. I uppgiftskonstruktionen användes variationsmönstren separation, kontrastering, generalisering och fusion.

En *separation* innebär att skapa någon form av kontrast mellan egenskaper. För att erfara en viss aspekt av något måste den separeras från andra egenskaper. Detta kan exempelvis ske genom att en aspekt varierar och de andra egenskaperna är invarianter. I studien hölls talföljden 95, 85, 75, 65, 55 invariant medan de olika reglerna ”Det är 5-hopp”; ”Skillnaden mellan ett tal och nästa är hela tiden 5”; ”Det minskar med 10 för varje tal” varierade.

En *kontrastering* innebär att skapa kontraster, så kallade motexempel. Ett objekts egenskaper kan urskiljas om vi jämför med ett annat objekt. I studien kontrasterades en aritmetisk talföljd (3, 6, 9, 12, 15) mot en rad av tal vilka som helst (17, 11, 23, 35, 37, 4).

En *generalisering* innebär varierade företeelser av samma objekt. En förståelse av mönster i talföljder omfattar också en erfarenhet av talföljder som är uppbyggda på olika sätt. I studien fick eleverna i en uppgift erfara de olika talföljderna 4, 8, 12, 16, 20; 100, 90, 80, 70, 60 och 1, 2, 4, 8, 16.

En *fusion* innebär att om eleverna arbetar med flera kritiska aspekter vid samma tillfälle måste aspekterna ifråga variera samtidigt. I studien skulle eleverna para ihop en uttryckt regel med rätt talföljd. För att kunna göra detta behövde eleverna samtidigt ur-

skilja de båda kritiska aspekterna: *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras* och *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten* då skillnaden mellan två element var lika stor, det vill säga 4 i två av talföljderna (1, 2, 4, 8 och 4, 8, 12, 16) (Lo 2012; Marton et al. 2004; Runesson & Tsui 2004).

Lärarna turades om att hålla i forskningslektionerna och övriga deltagande lärare var observatörer. Fokus för observationerna var på vilka sätt uppgiften fungerade som redskap för att mediera de kritiska aspekterna det vill säga var, när och hur i arbetet med uppgiften det gavs möjlighet för eleverna att urskilja och därmed erfara de kritiska aspekterna genom variation. Lektionerna videofilmades och det gjordes även vissa ljudupptagningar av elevdiskussioner.

Efter genomförd forskningslektion genomfördes ett eftertest (samma som förtestet). Intentionen med eftertesten var att få syn på huruvida eleverna visade någon förändring i sin förmåga att urskilja och beskriva mönster i talföljder. Eftertesten gav dock ingen information om hur respektive uppgift medierade kritiska aspekter. De gav snarare en bild av hur lektionen i sin helhet hade medierat de kritiska aspekterna. Mot bakgrund av detta valde vi att i analyserna främst utgå från de videoinspelade lektionerna samt observationsprotokollen. Detta med fokus på hur uppgifterna iscensattes och fungerade som redskap för att mediera de kritiska aspekterna. Med utgångspunkt i dessa analyser planerades nästa forskningslektion med fokus framför allt på förändring av uppgifterna för att möjliggöra urskiljning av kritiska aspekter.

Efter att samtliga tre cykler genomförts gjordes ytterligare en analys där samtligt datamaterial (förtest, intervjuer, uppgiftsdesign samt video- och ljudinspelningar) analyserades på nytt. Detta har medfört att det efter avslutad studie har synliggjorts nya aspekter som kan ha haft betydelse för på vilka sätt uppgifterna kan fungera som redskap för att mediera kritiska aspekter. Detta har kommenterats i vissa delar i resultatbeskrivningen.

Resultatbeskrivning och analys

Resultatbeskrivningen och analysen består av två delar där den ena delen tar sin utgångspunkt i forskningsfrågan: *Vilka är de kritiska aspekterna för att utveckla förmågan att urskilja och beskriva mönster i talföljder?* Denna fråga fokuseras främst i den del som redovisar resultatet av den kartläggning som gjordes av elevernas kunskande i utvalt lärandeobjekt. Forskningsfrågan *På vilka sätt fungerar uppgifterna som ett redskap för att mediera de kritiska aspekterna?* fokuseras främst i den del som redovisar resultatet av uppgifterna i de tre forskningslektionerna. I denna del har vi valt att endast redovisa två av uppgifterna grundligt av utrymmesskäl. Dock representerar det sammanfattande resultatet samtliga uppgifter i studien.

Möjliga kritiska aspekter och kritiska aspekter

Kartläggningen skulle ge information om huruvida följande möjliga kritiska aspekter var kritiska för den aktuella elevgruppen:

- kunna urskilja att förhållandet mellan delarna i talföljden kan se olika ut för olika talföljder

Fred & Stjernlöf

- kunna urskilja delarnas inbördes relation, relationernas förhållande till helheten och den icke angivna helheten
- att delarna behöver urskiljas samtidigt som helheten, inte nödvändigtvis samtliga delar, men tillräckligt många för att se en regelbundenhet

Här ges exempel på uppgifter i det skriftliga förtestet som visade på generella svårigheter i elevgruppen och som användes för att urskilja de kritiska aspekterna.

Fortsätt talmönstret.

Beskriv med ord hur talmönstret är uppbyggt.

Man skriver siffrorna i en och prickar.

I intervjuerna framkom att eleven uppfattade talföljder som något som endast upprepas som en sekvens, det vill säga som ett upprepat mönster och inte ett talmönster. Lösningstypen var vanligt förekommande i förtesten. Det förekom även uppfattningar bland eleverna att talföljder alltid ökar eller minskar konstant, till exempel som produkterna i en multiplikationstabell. Dessa svårigheter och uppfattningar ledde fram till den kritiska aspekten *veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt.*

Fortsätt talmönstret.

Beskriv med ord hur talmönstret är uppbyggt.

Jag ReKna HoP.

I lösningen ovan tar eleven inte hänsyn till hela sekvensen när hen ska fortsätta på den geometriska talföljden, vilket var vanligt förekommande hos flertalet elever. Eleverna hade svårt att upptäcka att förhållandet mellan delarna i talföljden kan se olika ut. I exemplet visar det sig då att eleven endast har tittat på de två sista elementen i talföljden (8 och 12) där skillnaden är 4, och sedan fortsatt med samma skillnad mellan talen. Av detta drogs slutsatsen att kunna *urskilja relationen mellan talföljdens olika delar och hur de förhåller sig till varandra och till helheten* var en kritisk aspekt.

Det förekom också exempel på att eleverna ibland fortsatte "lite hur som helst" på

vissa mönster och inte hade någon egentlig idé om att det måste finnas en bestämd regelbundenhet. Sammanfattningsvis kan även sägas att flertalet elever inte heller kunde göra en beskrivning av regelbundenheten i talföljden. Detta ledde fram till att den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras* formulerades.

Ovanstående exempel samt övriga uppgifter i det skriftliga förtestet och efterföljande intervjuer styrkte de möjliga kritiska aspekterna som kritiska för den aktuella elevgruppen. Sammanfattningsvis formulerades de kritiska aspekterna enligt följande:

- veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras
- veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt
- urskilja relationen mellan talföljdens olika delar och hur de förhåller sig till varandra och till helheten

Under forskningslektionerna bekräftades ovanstående aspekter som kritiska och under studiens gång tillkom ytterligare en aspekt, vilken beskrivs i resultatet av uppgifterna samt diskuteras i diskussionen.

Mediering av kritiska aspekter i uppgiften "Talmönster och inte talmönster"

Forskningslektion 1

Intentionen med uppgiften var att den skulle mediera den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*. Denna mediering skulle ske genom att variationsmönstret kontrast användes i uppgiftskonstruktionen. Kontrasteringen i uppgiften innebar att eleverna först skulle resonera parvis kring varför 3, 6, 9, 12, 15, är ett talmönster och varför 17, 11, 23, 35, 37, 4 inte är det. Läraren skulle sedan i en klassrumsdiskussion lyfta fram exempel från eleverna som ytterligare förstärkte denna kontrastering av vad ett talmönster är och inte är. Dessa kontrasteringar skulle ge eleverna möjlighet att urskilja den avsedda kritiska aspekten och därmed skulle en mediering av denna ske.

Kritisk aspekt	Lektion 1
veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras	Varför är det här ett talmönster? 3 6 9 12 15
	Varför är det här inte ett talmönster? 17 11 23 35 37 4

Uppgiften Talmönster och inte talmönster i forskningslektion 1

I iscensättningen av uppgiften ombads eleverna att parvis försöka hitta skillnaden mellan de två raderna av tal. När videoinspelningen från lektionen analyserades fann

Fred & Stjernlöf

vi att elevernas fokus hamnade vid att försöka hitta en regel för var och en av talraderna. Tämmligen snabbt fann eleverna en regel för den aritmetiska talföljden 3, 6, 9, 12, 15 och uttryckte den i form av 3-hopp eller 3:ans multiplikationstabell. Därefter lämnades denna talföljd och eleverna övergick till att försöka hitta en regel för talraden 17, 11, 23, 35, 37, 4. Några elever uttryckte regler som "spontan hopp"; "att först minskar, sedan ökar, ökar, ökar och minskar". Dock uppmärksammades aldrig elevernas olika förslag på regler och den aritmetiska talföljden kontrasterades inte mot talraden 17, 11, 23, 35, 37, 4. Därmed iscensattes heller aldrig det planerade variationsmönstret kontrast.

På det sätt som uppgiften tog form under lektionen anser vi inte att den fungerade som ett redskap för att mediera den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*.

Forskningslektion 2

I analysen av uppgiften i forskningslektion 1 fördes resonemang kring att uppgiften gav en tämligen begränsad uppfattning om vad mönster i talföljder är. I kartläggningen hade även den kritiska aspekten *veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt* urskilts. Med utgångspunkt i detta konstruerades uppgiften om så att den skulle mediera även denna kritiska aspekt. Denna mediering skulle ske genom att i uppgiftskonstruktionen använda variationsmönstren kontrast och generalisering. Kontrasteringen innebar att eleverna först skulle resonera parvis kring varför talföljderna 4, 8, 12, 16, 20; 100, 90, 80, 70, 60 och 1, 2, 4, 8, 16 är talmönster och varför 17, 11, 23, 35, 37, 4 inte är det. Läraren skulle sedan i en klassrumsdiskussion lyfta fram exempel från eleverna som ytterligare skulle förstärka kontrasteringen av vad ett mönster i en talföljd är och inte är. Generaliseringen innebar att läraren i helklassdiskussionen skulle belysa att de tre översta talföljderna alla var talmönster men att de var uppbyggda på olika sätt.

Kritisk aspekt	Lektion 2 och 3
veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras	De tre översta är talmönster. Varför är de det?
veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt	Det undre är inte ett talmönster. Varför är det inte det? 4 8 12 16 20 100 90 80 70 60 1 2 4 8 16 17 11 23 35 37 4

Uppgiften Talmönster och inte talmönster i forskningslektion 2 och 3

I iscensättningen av uppgiften berättade läraren att talföljderna 4, 8, 12, 16, 20; 100, 90, 80, 70, 60 och 1, 2, 4, 8, 16 är talmönster och att talraden 17, 11, 23, 35, 37, 4 inte är det. Läraren frågade sedan om någon elev kunde förklara varför de tre första tal-

följderna var talmönster. Därefter bads eleverna ge förslag på hur talföljderna skulle kunna fortsätta. När samtliga tre talföljder hade gått igenom följde följande dialog:

Lärare: När vi gått igenom de här tre har vi hittat någonting (pekar på de tre första talföljderna), ett system som gör att man kan lista ut, räkna ut hur ett talmönster kan fortsätta. Det här fjärde och sista här, det är inte ett talmönster och hur kan vi veta det, att det inte är ett talmönster?

Elev 1: Det är bara blandade tal.

Lärare: Kan det beskrivas på något annat sätt än att det är bara blandade tal? Varför är det inte ett talmönster?

Elev 2: Men de andra förklarar vilket nästa tal ska bli, men här kan man bara skriva till exempel 10.

Lärare: Det här understa som inte är ett talmönster kan man nästan lägga till vilket tal som helst här efter. Det spelar ingen roll. Men här uppe (pekar på de tre första talföljderna) finns det en förklaring. För det är så att det är när man kan hitta något som är gemensamt för ett mönster, ett samband, då kan man säga att man hittat en regel för hur ett talmönster är uppbyggt.

Läraren återgick sedan till de tre talföljderna, för att än en gång gå igenom dem med fokus på regler och huruvida de "stämde" in på respektive talföljd.

På det sätt som uppgiften tog form i lektionen anser vi att den fungerade som ett redskap för att mediera den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*. Detta antagande grundar sig på hur läraren i interaktion med eleverna på ett strukturerat sätt gick igenom de olika raderna av tal. Samtidigt belystes regelns funktion ur två aspekter, dels att kunna förutsäga nästkommande tal och dels att kontrollera att det stämmer överens med att talföljden fortsätter med samma regelbundenhet.

Dock anser vi att uppgiften som den slutligen tog form i lektionen inte fungerade som ett redskap för att mediera den kritiska aspekten *veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt*. Eleverna fick erfara talföljder vilka var uppbyggda på olika sätt. Dock skedde aldrig en urskiljning av denna kritiska aspekt genom samtidighet och variation och därmed gavs eleverna inte heller möjlighet att urskilja den. Det sistnämnda var dock inget som togs upp i analysen efter forskningslektion 2. Detta var något som blev tydligt först efter de avslutade cyklerna, varför detta inte togs hänsyn till i planeringen av forskningslektion 3.

Forskningslektion 3

Mot bakgrund av ovanstående analys behölls uppgiften i sin helhet. Uppgiften introducerades på samma sätt som i forskningslektion 2. Sedan lyftes de olika talföljderna i helklass med utgångspunkt i att eleverna skulle uttrycka en regel som kunde beskriva respektive talföljd. De förslag på regler som eleverna gav prövades. När lektionen kom till talraden 17, 11, 23, 35, 37, 4 bad läraren eleverna motivera varför det inte var ett talmönster. En elev motiverade istället varför han ansåg att **det var** ett talmönster:

”Men om man sätter 17 efter 4 och sedan 11, 23, 35 då blir det ett mönster.” Läraren kommenterade endast genom att säga att det inte är ett talmönster.

På det sätt som uppgiften tog form i lektionen anser vi att uppgiften inte fungerade som ett redskap för att mediera den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*. Denna analys grundar sig på att det aldrig skedde någon kontrastering mellan talföljderna 4, 8, 12, 16, 20; 100, 90, 80, 70, 60 och 1, 2, 4, 8, 16 och talraden 17, 11, 23, 35, 37, 4. Inte heller den kritiska aspekten *urskilja att talföljder kan vara uppbyggda på olika sätt* medierades då det planerade variationsmönstret generalisering aldrig iscensattes.

När det insamlade datamaterialet från forskningslektionen återigen studerades synliggjordes det att den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras* inte var tillräckligt precis. Detta blev tydligt när eleverna ombads förklara varför 17, 11, 23, 35, 37, 4 inte är ett talmönster. Två elever gav följande förklaringar: ”Det är bara en massa siffror” och ”Först tar man bort, sedan lägger man till, sedan tar man bort, tar bort, lägger till, lägger till.” Vi anser att det här visar på att en del elever uppfattade regelbundenhet som något som inte behöver vara precist. Med bakgrund i detta drogs slutsatsen att den kritiska aspekten behövde omformuleras med tillägget *som används för att bestämma okända element i talmönstret*. I lektionen gjorde läraren ett försök till att fånga upp denna aspekt genom att säga att regeln måste tala om vilket nästa tal är samt visade på att de regler som föreslagits för de andra raderna av tal gör just detta.

Mediering av kritiska aspekter i uppgiften ”Hitta regeln”

Forskningslektion 1

Intentionen med uppgiften var att den skulle mediera de kritiska aspekterna *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras* och *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten*. Denna mediering skulle ske genom att variationsmönstret fusion användes i uppgiftskonstruktionen, med innebörden att en urskiljning av flera aspekter skulle ske samtidigt. Uppgiften innebar att eleverna skulle para ihop en uttryckt regel med rätt talföljder. För att fusionen skulle möjliggöra för eleverna att samtidigt urskilja de båda kritiska aspekterna hade uppgiften två talföljder; 1, 2, 4, 8 (geometrisk) och 4, 8, 12, 16 (aritmetisk), där skillnaden mellan två element var lika stor, det vill säga 4. Dessa val av talföljder ansåg lärarlaget skulle medföra att eleverna samtidigt skulle behöva urskilja de kritiska aspekterna. Detta då framför allt den första talföljden innebar att eleverna behövde ta hänsyn till hela talföljden för att kunna säga huruvida regeln ”det ökar med 4 hela tiden” stämde. Variationsmönstret skulle iscensättas genom att eleverna parvis diskuterade uppgiften. Denna diskussion skulle sedan följas upp i en gemensam klassrumsdiskussion, där läraren framför allt skulle lyfta den kritiska aspekten *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten*.

Kritisk aspekt	Lektion 2 och 3
veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras	Vilket talmönster passar regeln ihop med? Ringa in rätt mönster.
urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten	Regel: "Det ökar med 4 hela tiden". 1 2 4 8 4 8 12 16

Uppgiften Hitta regeln i forskningslektion 1

I iscensättningen av uppgiften fick eleverna i uppgift att diskutera kring vilken talföljd som regeln "det ökar med 4 hela tiden" stämde in på. I den gemensamma klassrumsdiskussionen visade det sig att samtliga elever hade valt rätt talföljd för regeln. Eleverna beskrev på olika sätt hur de såg att det var "4-hopp" i talföljden. I anslutning till elevernas redovisningar upprepade läraren vid ett flertal tillfällen "att regeln måste passa in på hela mönstret". Eleverna gavs dock aldrig möjlighet att diskutera och resonera kring detta i förhållande till talföljden 1, 2, 4, 8 och varför den inte stämde in på regeln "4-hopp". Det uppstod heller aldrig någon jämförelse mellan talföljdernas regelbundenhet i klassrumsdiskussionen. Detta, anser vi, medförde att det inte heller gavs möjlighet för samtliga elever att urskilja den kritiska aspekten *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten*. Mot bakgrund av detta ansåg vi inte att uppgiften, som den tog form i lektionen, fungerade som redskap för att mediera de kritiska aspekterna.

I analysen efter de tre cyklerna, då datamaterialet återigen granskades, ifrågasattes huruvida den skrivna uppgiften överhuvudtaget gav en möjlighet att mediera den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*. Detta i relation till att uppgiften endast tillhandahöll en enda regel och huruvida det var tillräckligt för att eleverna skulle kunna generalisera detta. I den analys som gjordes i direkt anslutning till forskningslektionen var detta dock inget som uppmärksammades.

Forskningslektion 2

Intentionen var även i forskningslektion 2 att uppgiften skulle fungera som redskap för att mediera de kritiska aspekterna *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras* och *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten*. Dock hade en av variationsteoriens utgångspunkter tagits i beaktande, att det är den aspekt som ska urskiljas som också ska variera (Lo 2012). Med detta som utgångspunkt konstruerades uppgiften om så att variationsmönstret separation tillsammans med fusion skulle möjliggöra en mediering av de kritiska aspekterna. Separationen innebar att den aritmetiska talföljden 95, 85, 75, 65, 55 hölls invariant och reglerna "Det är 5-hopp"; "Skillnaden mellan ett tal och nästa är hela tiden 5"; "Det

minskar med 10 för varje tal” varierade. Uppgiften skulle iscensättas genom att eleverna i lektionen parvis skulle hitta den rätta regeln för talföljden. Variationsmönstret skulle uppstå genom att samtliga tal i talföljden slutade på 5 och två av reglerna tog upp 5 i regeln. Fusionen skulle möjliggöras genom att eleverna skulle behöva ta hänsyn till hela talföljden när de valde den regel som stämde överens med talföljden. Vidare skulle eleverna sedan i den gemensamma helklassdiskussionen motivera sitt val. Här skulle också en jämförelse av de olika reglerna och elevernas svar möjliggöra ytterligare en urskiljning av den kritiska aspekten *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten*.

Vilket barn säger regeln för talmönstret?

95 85 75 65 55

Pia: Det minskar med 10 för varje tal.

Ted: Det är 5-hopp.

Ove: Skillnaden mellan ett tal och nästa är hela tiden 5.

Uppgift Hitta regeln i forskningslektion 2 och 3

de båda kritiska aspekterna till viss del medierades. Detta mot bakgrund av att eleverna dels i den parvisa diskussionen och dels i den gemensamma klassrumsdiskussionen var tvungna att urskilja hur talföljdens delar förhöll sig till varandra för att kunna välja en regel som de ansåg stämde.

Mot bakgrund av ovanstående ansågs den skrivna uppgiften ha potential för att möjliggöra en mediering av de avsedda kritiska aspekterna. Återigen var det först efter den tredje cykeln som vi ställde oss frågande till huruvida uppgiften gav möjlighet till en mediering av den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*.

I iscensättningen diskuterades uppgiften parvis vilket efterföljdes av en diskussion i helklass där eleverna fick föreslå vilken regel de tyckte stämde. Detta skedde utan att svaren kommenterades av läraren i termer av rätt eller fel. Samtliga regler kom upp som förslag och med utgångspunkt i detta frågade läraren hur man skulle kunna ta reda på vilken regel som var rätt. Här öppnade läraren upp för en jämförelse av reglerna i förhållande till talföljdens uppbyggnad. Fokus i denna jämförelse hamnade dock på det rätta svaret och inte på jämförelsen av de olika reglerna. De elever som hade andra svar än det rätta gavs inte möjlighet att fullt ut förklara hur de resonerat. Läraren gjorde istället egna tolkningar av det eleverna började säga och prövade till exempel aldrig om regeln ”att skillnaden mellan talen är 5” stämde in eller inte på talföljden.

Trots ovanstående drogs slutsatsen i analysen efter forskningslektion 2 att

Forskningslektion 3

Med ovanstående analys som grund behölls den skrivna uppgiften i sin helhet inför forskningslektion 3. Den förändring som planerades var själva iscensättningen av variationsmönstret fusion. Denna fusion skulle iscensättas när eleverna under ledning av läraren skulle pröva alla reglerna på talföljden varpå en jämförelse av reglerna i förhållande till talföljden skulle uppstå.

Iscensättningen av uppgiften skedde på liknande sätt som i forskningslektion 2. I genomgången som följde valde läraren att låta ett elevpar redovisa sitt resonemang och därefter direkt pröva huruvida talföljden stämde med regeln. Detta elevpar hade kommit fram till rätt svar, vilket medförde att variationsmönstret inte kunde iscensättas som planerat. Dock gjorde läraren ett försök till att iscensätta variationsmönstret genom att låta ett annat elevpar berätta hur de hade tänkt. Eleverna som hade valt regeln "Det är 5-hopp" gav följande förklaring: "Vi trodde att det var 5-hopp för att alla talen slutar på 5." Läraren följde upp detta genom att dra följande slutsats: "Ni har endast tittat på femmorna i talmönstret och har därför inte tagit hänsyn till hela mönstret." När inte fler elever ville berätta hur de hade resonerat lyfte läraren fram hur läraren själv trodde att det elevpar hade gjort som valt rätt regel: "De har tagit hänsyn till hela mönstret. De har tagit hänsyn till relationen mellan talen."

På det sätt som uppgiften tog form i lektionen är vi osäkra på om det möjliggjordes en mediering av den kritiska aspekten *urskilja hur talföljdens delar förhåller sig till varandra och till helheten*, då detta endast var något som läraren sa men inget som samtliga elever själva fick erfara. Möjligen kunde detta erfارande ha uppstått i elevernas pararbete med uppgiften men lektionsobservationerna visade att flera elever hittade rätt regel direkt och därför inte brydde sig om att undersöka de andra reglerna.

Sammanfattande resultat

Här sammanfattas resultaten i korthet i relation till forskningsfrågorna. I diskussionsdelen förs sedan resonemang kring dessa resultat.

Vilka är de kritiska aspekterna för att utveckla förmågan att urskilja och beskriva mönster i talföljder?

Omformulerade och preciserade kritiska aspekter:

- veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras och som används för att bestämma okända element i talmönstret
- veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt
- urskilja relationen mellan talföljdens olika delar och hur de förhåller sig till varandra och till helheten

På vilka sätt fungerar uppgifterna som ett redskap för att mediera de kritiska aspekterna?

Antagandena här utgår ifrån att när en kritisk aspekt iscensätts genom variation så

medieras den och görs därmed möjlig att urskilja. Nedanstående aspekter är en sammanställning utifrån samtliga uppgifter i studien.

Vi har funnit två övergripande aspekter betydelsefulla enligt följande:

Uppgiftens konstruktion avseende:

- Frågans öppenhet
- Variationsmönster

Iscensättandet av variationsmönster vilket består av:

- Hur uppgiften presenteras
- Hur läraren tar tillvara inspel/resonemang från eleverna vilket kan få betydelse för iscensättning och urskiljning av kritiska aspekter

Diskussion

Här diskuteras studiens resultat utifrån tidigare forskning. Först diskuteras huruvida de kritiska aspekter studien urskilt kan antas vara generaliserbara. Sedan förs en diskussion kring vad som påverkade medieringen av de kritiska aspekterna; uppgiftens konstruktion avseende frågans öppenhet och variationsmönster samt hur detta iscensattes i undervisningen.

De kritiska aspekternas generaliserbarhet

Två av de i vår studie urskilda kritiska aspekterna kan likställas med kritiska aspekter som urskilts i andra liknande studier. I Erixson m fl (2013), vilken är en Learning study genomförd i årskurs 3–4, urskildes kritiska aspekter som innefattar de i vår studie kritiska aspekterna *veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt samt urskilja relationen mellan talföljdens olika delar och hur de förhåller sig till varandra och till helheten*. Ekdahl (2012) har genom en fenomenografisk studie utforskat kritiska aspekter avseende talmönster i årskurs 3 och 4 och även där finns kritiska aspekter som formulerats på liknande sätt som de två kritiska aspekter som nämns ovan. Detta tolkar vi som att de kritiska aspekterna *veta att det finns olika slags talföljder som kan vara uppbyggda på olika sätt samt urskilja relationen mellan talföljdens olika delar och hur de förhåller sig till varandra och till helheten* förefaller vara generaliserbara. Detta då dessa är gemensamma för tre studier som samtliga är designade och analyserade med variationsteoretisk utgångspunkt och som rör elever i tidigare skolor.

Även den kritiska aspekt som slutligen formulerats som *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras och som används för att bestämma okända element i talmönstret* innefattas till viss del i den kritiska aspekt som i Erixsons m fl (2013) studie är formulerad som ”Eleven måste förstå att det finns en regelbundenhet, ett mönster, ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet” (s. 76). I vår studie framkom i forskningslektion 3 att vissa elever uppfattar regelbundenhet som något som inte behöver vara precist, vilket blir tydligt när en elev tycker att en regel kan vara ”Det ökar, det minskar, sedan ökar det ... ” vilket denna elev anser vara en regel till den talrad som i uppgiften ”Talmönster och inte talmönster” inte var ett talmönster. Här anser vi att den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är kon-*

struerade enligt en regel som inte ändras och som används för att bestämma okända element i talmönstret skiljer sig från Erixson m fl studie och pekar på en aspekt som vi inte funnit i andra studier. Ibland tas aspekter för givna rörande elevernas förståelse när kritiska aspekter identifieras. Wernberg (2009) beskriver hur detta förgivettagande kan få konsekvenser för elevernas möjlighet till att utveckla lärande i utvalt lärandeobjekt. Under vår studie togs för givet att eleverna förstod att en regel som beskriver en regelbundenhet innebär att den kan tala om vilket nästa tal/utelämnade tal i en talföljd är. Först i den sista forskningslektionen blev det uppenbart att detta inte var självklart för eleverna. Från början formulerades denna kritiska aspekt som *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras* men fick sedan tillägget *”och som används för att bestämma okända element i talmönstret”*. Troligen hade tidigare insikter om detta förändrat uppgifternas utformning i studien avseende variationsmönster.

Kullberg (2010) indikerar att identifierade kritiska aspekter i tidigare studier kan användas som utgångspunkt vid identifieringen av kritiska aspekter i en ny elevgrupp. Vi anser att även vår studie visat att detta är möjligt genom Learning study samt att detta bidrar till att skapa en kumulativitet i utvecklingen av ny kunskap om lärande, vilket belyses av såväl Eriksson (2013) som Runesson (2012).

Uppgifters konstruktion – variationsmönster och iscensättning av dessa

Studien har visat exempel på att det inte är tillräckligt att bygga in variationsmönster i den skrivna uppgiften för att de kritiska aspekterna ska medieras. Lindberg (2010) menar att det sätt uppgifterna iscensätts i klassrummet i interaktion med eleverna är av stor betydelse för hur uppgiften tar sin slutliga form. Vår studie har gett exempel på hur iscensättningen av uppgiften i interaktion med eleverna är av betydelse för om urskiljning av de kritiska aspekterna görs möjlig. Lindberg framhåller klassrumskommunikationens roll vid iscensättningen och skriver att lärare måste *”... förhålla sig till de situationer som uppstår så att de kan driva kommunikationen i relation till det de vill åstadkomma”* (ibid s. 121). De val läraren gör under lektionen har betydelse samt hur läraren är öppen för den interaktion med eleverna som ibland uppstår. Valet av vilka elever som får svara först då en diskussion inleds i klassen är exempel på ett tillfälle då läraren kan göra ett medvetet val i förhållande till den kritiska aspekt som ska belysas, vilket blev tydligt i vår studie.

I uppgiften *”Talmönster och inte talmönster”* gavs det exempelvis möjlighet att i interaktion med eleverna skapa nya variationsmönster under diskussionerna i helklass, vilket skulle kunna möjliggöra urskiljning av den kritiska aspekten *veta att alla talmönster är konstruerade enligt en regel som inte ändras*. Detta skedde när en elev beskrev talraden 17, 11, 23, 35, 37, 4 som att det är *”spontan hopp”*. Läraren lät detta tillfälle gå förbi och lade snarare vikt vid att alla elever skulle få berätta vad de hade tänkt än att fokusera på resonemang som kunde stödja eleverna att urskilja den kritiska aspekten. Just i denna sekvens öppnades det upp för en möjlighet att kontrastera exempelvis *”4-hopp”* med *”spontan hopp”* och vad det är som gör att *”spontan hopp”* inte är en *”bra”* regel men att *”4-hopp”* är det.

Hur uppgiften tar slutlig form i forskningslektion 2 och 3 är också olika trots att den skrivna uppgiften är densamma.

Lo (2012) lyfter fram hur läraren under en lektion, genom interaktion med eleverna, kan skapa nya variationsmönster. Magnusson & Maunula (2011) belyser detta genom att framhålla hur läraren bör ha beredskap för hur det kritiska i ett specifikt undervisningsinnehåll kan lyftas fram på olika sätt. Detta för att ha förmågan att fånga upp viktiga elevtankar ur aspekten att synliggöra det som är kritiskt.

”What the variation framework does is point to what to look for, the critical features, and the pattern of variation and invariance. It also points to the best source of insight into what is critical and what is necessary: the learners themselves.” (Marton & Pang 2006, s. 217)

Kullberg (2011) urskiljer hur lärarna tillsammans med eleverna skapar något som benämns som ”space of learning”. Även Runesson (2011) beskriver just detta fenomen när lärare och eleverna tillsammans skapar variationsmönster. Vår studie har visat på betydelsen av att läraren tar tillvara elevernas inspel och resonemang under lektionen för att skapa eller iscensätta variationsmönster, i ett ”space of learning” och därmed bidra till att de kritiska aspekterna medieras. För att detta ska vara möjligt är sannolikt lärarens kunskaper om innebörden av de kritiska aspekterna avgörande. Det kräver att läraren är väl insatt i undervisningsinnehållet samt väl medveten om vilka kritiska aspekter av innehållet som kan lyftas fram när tillfälle ges i lektionen. Andra genomförda learning studies visar på liknande erfarenheter där interaktionen mellan lärare och elever betonas för att de planerade variationsmönstren ska iscensättas. Wernberg (2009) menar att ”Undervisning som fenomen är interaktivt och läraren måste under en lektion göra övervägande och agera” (s. 195). Ljungblad & Lernerstad (2011) talar om vikten av att matematiklärare förmår mediera matematiska strukturer i interaktion med eleverna; detta med elevernas egna uppfattningar som utgångspunkt. En forskningslektion i en Learning study är alltid välplanerad och det finns en risk i att vara låst i denna planering. Vi anser att det i vår studie blir tydligt att när läraren inte uppmärksammade de kritiska aspekterna gick man miste om att fånga upp tillfällen där de kritiska aspekterna kunde medieras genom en interaktion mellan lärare, elever och undervisningsinnehållet.

Magnusson & Maunula (2011) framhåller att det är genom vårt val av variationsmönster i lektionerna/uppgifterna som vi kan åstadkomma det lärande vi avser hos eleverna. I en Learning study kan fokus hamna på design och analys av variationsmönster. Vår studie har visat på iscensättnings betydelse för om variationsmönstren görs tillgängliga för eleverna och lärarens roll i denna iscensättning.

Uppgifters konstruktion – frågor av mer öppen karaktär

Vi tycker oss kunna urskilja ytterligare en aspekt som är av betydelse för iscensättningen, nämligen hur frågan i uppgiften är formulerad avseende grad av öppenhet. I den uppgift i studien där ett rätt svar efterfrågades (uppgiften Hitta regeln) förefaller detta vara en orsak till att de planerade variationsmönstren inte iscensattes. Studien visar att både lärare och elever styrdes av att uppgiften frågar efter ett rätt svar. Detta

blev tydligt både i forskningslektion 2 och 3, då rätt regel (svar) togs upp som första exempel i diskussionen. Därmed hamnade fokus i klassrumsdiskussionen på rätt svar och inte på en jämförelse av reglerna, vilket var en förutsättning för att de kritiska aspekterna skulle medieras. Detta ledde till att medieringen av de kritiska aspekterna uteblev.

Lindberg (2010) argumenterar för behovet av att använda och utveckla ”... så kallade *epistemiska uppgifter*, det vill säga uppgifter som karaktäriseras av att de efterfrågar kunskapande snarare än det rätta svaret” (s. 121 f.). Betydelsen av om läraren är fokuserad på rätt svar eller inte är något även Wernberg (2009) har uppmärksammat.

”Vi såg på filmen att läraren hade ett öppnare förhållningssätt till elevernas svar och hela tiden var intresserad av hur eleverna funderade för att förstå hur de tänkte och gavs därmed möjlighet att hjälpa eleverna att bygga vidare på denna kunskap.” (Wernberg 2005, s. 61)

Vidare lyfter Wernberg fram att det inte enbart handlar om planerade variationsmönster. I en genomförd learning study har hon urskilt en skillnad i elevresultat beroende av på vilket sätt läraren ställde frågor och om läraren i interaktionen med eleverna var fokuserad på att eleverna skulle svara rätt snarare än att de skulle urskilja de kritiska aspekterna.

Zevenberger, Sullivan & Mousley (2001) menar att det i arbete med öppna uppgifter ges större möjligheter till lärande och förståelse än vad som annars är möjligt. Björklund Boistrup (2013) för liknande resonemang och framhåller hur öppna uppgifter och frågor ger elever större möjlighet att visa och utveckla förmågor som att beskriva, resonera och undersöka. Lundahl (2011) nämner också öppna uppgifter och frågor i förhållande till formativ bedömning, där öppna frågeställningar anses ge mer information om vad elever kan men också om hur de kan något.

Att utforma mer öppna frågeställningar i uppgifterna skulle enligt vår tolkning kunna underlätta en iscensättning av variationsmönster, då eleverna bjuds in att resonera med hjälp av uppgiftens frågeställning. En fundering som väckts är därför om ytterligare bearbetning av frågeställningen i uppgiften ”Hitta regeln”, som leder till att uppgiften blir av mer öppen karaktär, skulle underlätta iscensättningen av de kritiska aspekterna. I stället för att fråga efter vilken regel som stämmer med talföljden skulle frågeställningen kunna lyda: ”Hur kan de barn ha tänkt, som skrivit dessa tre regler till talföljden 95, 85, 75, 65, 55.”

Referenser

- Björklund Boistrup, L. (2013). *Bedömning i matematik pågår! Återkoppling för elevers engagemang och lärande*. Stockholm: Liber.
- Carlgren, I. (2012). *Vilken forskning behöver skolan? – Forskning om eller i skolan?* Artikel i nättidningen Skola & Samhälle. Hämtad den 2014-02-26 från: <http://www.skolaochsamhalle.se/page/2/?s=ingrid+carlgren>.
- Carlgren, I. & Eriksson, I. (2012). *Att undervisa för lärande av specifika mål – Learning Study som FoU-stöd i implementeringen av Gr/Gy2011*.

Fred & Stjernlöf

- Ekdahl, A-L. (2012). *Elevers skilda sätt att erfara talmönster – en studie av elever i årskurs 3 och 4*. (Masteruppsats). Stockholm: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet.
- Ekdahl, A-L. (2013). *Talföljder*. Hämtad från Skolverkets lärportal för Matematiklyftet den 2014-02-24 <https://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/content/conn/ContentServer/uuid/dDocName:LI64RH5PRO007851?rendition=web>.
- Eriksson, I. (2013). Introduktionsåret – ett kollegialt utvecklingsarbete. I *Mentorskap i skola och förskola*. Ståhle, Y. & Bronäs, A. (red.) (2013). Stockholm: Norstedts.
- Erixson, L., Frostfeldt-G. K., Kerekes, K. & Lundberg, B. (2013). Att se det som inte syns – om talföljder i årskurs 3 och 4. *Forskning om undervisning och lärande nr 10*, (s. 64–81). Stockholm: Stiftelsen SAF. Hämtad den 2013-08-21 från: <http://www.forskul.se/ffiles/0079A25C/Talfoljder.pdf>.
- Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24:3, (s. 315–331).
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned: professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Diss. Göteborg: Göteborgs universitet, 2010. Tillgänglig på Internet: http://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/22180/1/gupea_2077_22180_1.pdf.
- Kullberg, A. (2011). *Vad lär eleverna och vad görs möjligt för dem att lära?* Ur SMFD Medlemsblad. Hämtad den 2011-12-01 från <http://www.mai.liu.se/SMDF/medlemsblad.pdf>.
- Liljedahl, P. (2004). Repeating patterns or number patterns: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics*, 26(3), (s. 24–42).
- Lindberg, V. (2010). Skolans kunskapsinnehåll i ljuset av elevers uppgifter – exemplet matematik. I Eriksson, I., Lindberg, V. & Österlind, E. *Uppdrag undervisning* (s. 109–123). Lund: Studentlitteratur.
- Ljungblad, A-L. & Lennerstad, H. (2011). *Matematik och respekt: matematikens mångfald och lyssnandets konst*. Stockholm: Liber
- Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta universitatis Gothoburgensis.
- Lundahl, C. (2011). *Bedömning för lärande*. Stockholm: Norstedts.
- Magnusson, J & Maunula, T. (2011). Variationsteorin ur ett undervisningsperspektiv. I Maunula, T., Magnusson, J. & Echevarra, C. (red.) *Learning study: undervisning gör skillnad* (s. 35–50). 1. uppl. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Pang, M.F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the Learning Science*, 15(2) (s. 193–220). Hämtad den 2011-11-01 från: <http://hub.hku.hk/bitstream/10722/45444/1/122030.pdf>
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. I *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3–40). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran

- & L. Lee (red.). *Approaches to Algebra – Perspectives for Research and Teaching* (s. 65–86). Dordrecht: Kluwer.
- Olteanu, C. (2013). *Vad är algebra och varför behövs den?* Hämtad från Skolverkets lärportal för Matematiklyftet den 2014-02-24. <https://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/content/conn/ContentServer/uuid/dDocName:LI64RH5PROoo787o?rendition=web>.
- Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children – More than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom* 12(3) (s. 8–13).
- PRIM-gruppen. (2013). *Utvärdering i matematik. Resultat, analys och didaktiska kommentarer. Stockholms kommun 2013*. Stockholm: Stockholm universitet.
- Runesson, U. (2011). Lärares kunskapsarbete – exemplet Learning Study. I *Forskning om undervisning och lärande* 5, 2012 (s.6–17). Stockholm: Stiftelsen SAF. Hämtad den 2012-01-05 från <http://www.forskul.se/ffiles/0040C3Fo/Ful5.pdf>
- Runesson, U. (2012). Learning Study-ämnesdidaktiskt utvecklingsarbete och forskning. I *Forskning om undervisning och lärande* 8, 2011(s.6–17). Stockholm: Stiftelsen SAF. Hämtad den 2013-06-05 från [http://www.stiftelsensaf.se/web/saf.nsf/file/13D92B894BBB6435C1257A3B002F9862/\\$FILE/FUL8.pdf#page](http://www.stiftelsensaf.se/web/saf.nsf/file/13D92B894BBB6435C1257A3B002F9862/$FILE/FUL8.pdf#page)
- Skolverket (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007 – en djupanalys av hur eleverna förstår centrala begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Rapport till 323. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011). *Kommentarer till kursplanen i matematik*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2012). *TIMSS 2011. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. Rapport 380*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2013a). *PISA 2012. 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*. Rapport 398. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2013b). Talmönster och talföljder. I *Diamant. Diagnoser i matematik*. Hämtad den 2014-05-12 från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.193722!/Menu/article/attachment/3_Talmonster.pdf.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. I Chick, H.L. & Vincent, J. L. (red.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, vol 4 (s. 305–312). Melbourne: PME.
- Warren, E. & Cooper, T. (2007). Generalizing the Pattern Rule for Visual Growth Patterns: Action that Support 8 Year Olds' Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), (s. 171–185).
- Wernberg, A. (2005). Lärare lär om elevers lärande med hjälp av learning study. I Holmqvist (red.) (2005). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell* (s. 51–66). Lund: Studentlitteratur.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. (Doktorsavhandling).

Fred & Stjernlöf

Umeå: Umeå Universitet.

Zevenbergen, R., Sullivan, P. & Mousley, J. (2001). Open ended tasks and barriers to learning. Teachers perspectives. *Australian Primary Mathematics Classroom* 6(1), (s. 4-9).