

”Det brukar vara så här långt!”

En jämförande studie om kritiska drag för elevers uppfattning av tallinjen

M Björk & G Pettersson Berggren

Hur elever i år 2 uppfattar och använder tallinjen som redskap har undersökts i en Learning study. För att kunna hantera tallinjen som redskap i matematiskt tänkande behöver eleverna, i enlighet med ett variationsteoretiskt sätt att se på lärande, urskilja vad som är specifikt för denna representationsform av talsystemet. Kritiska aspekter i andra studier med liknande lärandeobjekt har beaktats vid utformandet av förtest i denna studie. Dessa aspekter har också kompletterat och fördjupat analysen av resultaten.

Studiens resultat överensstämmer i stora delar med vad som framkommit i andra Learning study. Det pekar på vikten av att elever har förståelse för att tallinjen kan ha olika omfång, sambandet mellan värde och avstånd, att det behövs två referenspunkter för att kunna placera ett tredje tal, alltså bestämma tallinjens skala, samt hur del och helhet förhåller sig till varandra. Resultaten diskuteras i förhållande till tidigare Learning study samt i relation till vad vi ser som intressant ur ett undervisningsperspektiv. Studien har genomförts av matematiklärare vid Sjöstadsskolan i Stockholm, som en del i ett FoU-projekt i samarbete mellan Stockholms stad och Stockholms universitet.

Nyckelord: tallinje, Learning study, variationsteori, kritisk aspekt, kritiskt drag, undervisning, matematik



Marie Björk (t h), lärare med kandidatexamen i specialpedagogik och magisterexamen i didaktik, arbetar som specialpedagog på Sjöstadsskolan i Stockholm. Gunilla Pettersson Berggren (t v), lärare med magisterexamen i didaktik, arbetar som lärare och utvecklingsledare på samma skola.

Båda har lång erfarenhet av att leda Learning study och ingår i det ämnesdidaktiska nätverket i Stockholm, samordnat av STLS (Stockholm Teaching and Learning Studies). Från höstterminen 2014 har båda försteläraryupdrag på Sjöstadsskolan.

Introduktion

SVENSKA ELEVERS RESULTAT i matematik har enligt internationella mätningar försämrats under ett flertal år (Mullis m.fl. 2012; Skolverket, 2013). Detta har föranlett satsningar i form av utvecklingsprojekt och fortbildningsinsatser inom matematikområdet på både nationell och kommunal nivå. Learning study är en lärardriven modell som erbjuder en möjlighet för lärare att systematiskt utforska den egna verksamheten för att producera ny kunskap (Carlgren, 2012). Sjästadsskolan genomför sedan 2010 en Learning study i matematik varje termin som ett led i den kollegiala utvecklingen av undervisningen. I dessa studier har man i viss mån tagit del av andra skolors studier men inte systematiskt använt dessa resultat vid nya studier. I de studier som finns rapporterade har det heller inte framgått att man tagit stöd i tidigare studier vid inventering av möjliga kritiska aspekter.

I en studie i skolår 7 (Bergman m.fl., 2010) där syftet var att utveckla undervisningen av subtraktion med negativa tal, uppmärksammades att de elever som kunde använda en tallinje för att visualisera beräkningar, lättare kunde genomföra subtraktioner med negativa tal. Lärarna upptäckte också att eleverna inte fullt ut behärskade tallinjen som redskap för att jämföra och göra enkla beräkningar med negativa tal. I undervisningen använde lärarna sig av en tallinje som en konkret bild på golvet för att eleverna skulle kunna erfara talens relationer avståndsmässigt kopplade till värde. Detta kom att bli en utgångspunkt för ett utforskande av hur elever uppfattar och hanterar tallinjen som representationsform för det decimala talsystemet samt hur undervisningen i relation till detta kan utvecklas.

I matematikdidaktisk litteratur beskrivs ofta hur konkret, laborativt material kan användas i syfte att synliggöra positionernas värden i flersiffriga tal. Exempelvis kan pengar eller tiobasmaterial i form av hundratalplattor, tiotalstavlar och entalskuber eller kolumner där hundratal, tiotal och ental avläses i förhållande till varandra, användas. Syftet är att eleverna med hjälp av materialet ska utveckla ett abstrakt tänkande (Löwing, 2011; Malmer, 2010; McIntosh, 2008). Vi har dock i den egna undervisningen upplevt att material som dessa kan begränsa elevernas förståelse för höga tal, tal i decimalform och negativa tal. Kinard & Kozulin (2012) lyfter fram tallinjen som ett redskap för begreppsbyggnad och matematiska resonemang. Föreliggande studie tar sin utgångspunkt i hur man skulle kunna undervisa om tallinjen för att yngre elever ska utveckla en större förståelse för det decimala talsystemet samt hur tal förhåller sig värdemässigt till varandra.

Representationsformer och tankeredskap

För att underlätta för elever att uppfatta och bearbeta olika matematiska problem och relationer är det av betydelse att de ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda olika matematiska representationer (Lundberg & Sterner, 2009; McIntosh, 2008; Taflin, 2007). De representationsformer som används kan vara konkreta, logiskt/språkliga, aritmetiska/algebraiska, geometriska och grafiska representationsformer (Taflin, 2007, s 64).

Kinard & Kozulin (2012) anser att matematikundervisningen ofta utgår från fär-

diga matematiska begrepp och modeller för uträkningar som eleverna ska lära sig att tillämpa eller memorera. Abstrakta symboler används tidigt och eleverna ges inte möjligheter att bygga upp en förståelse för matematiska begrepp eller utveckla ett matematiskt språk. Symboler och redskap blir en del av det matematiska innehållet istället för en hjälp att resonera och generalisera. Begreppet representation lyfts av författarna fram som en viktig mental procedur för människans utveckling och de menar att representation av antal med exempelvis fingrar och kulram har påverkat människans matematiska och kognitiva förmåga (s 27). Kinard & Kozulin (2012) före-drar termen *symboliska redskap* i stället för *representation* och beskriver hur eleverna kan utveckla ett fördjupat matematiskt tänkande genom att appropriera matematik-specifika tankeredskap. Exempel på andra tankeredskap är positionssystemet, tabellen och koordinatsystemet (Kinard & Kozulin, 2012, sid 13). I denna text ansluter vi oss till Kinard & Kozulins definition av tallinjen som representation och matematik-specifikt tankeredskap.

Tallinjen i andra studier

Studier som berör barns uppfattningar och hantering av en tallinje med en utvecklingspsykologisk ansats, bedömer vi som relevanta ur ett undervisningsperspektiv. Några av dessa, där yngre barns lärande fokuseras, refereras här nedan.

För att kunna konstruera en föreställning av en tallinje måste eleven klara att koppla ihop förståelse för antal, tal uttryckta språkligt och symboliskt (siffror) med spatials föreställningar och ordinala uttryck (von Aster & Shalev, 2007). Elever i åldrarna 5 till 8 år visar ofta en uppfattning av tallinjen som logaritmisk. Detta innebär att de på en tallinje där man markerat 0 och 100 tenderar att placera låga tal med större avstånd än vad som är proportionerligt och de höga talen alltför nära 100. Denna uppfattning förändras med ökad ålder till en linjär representation där talen är proportionerligt fördelade med jämna mellanrum (Berteletti m.fl., 2010; Booth & Siegler, 2008). Booth & Siegler (2008) har, i en studie med elever i de tidiga skolåren, konstaterat att elever som har en linjär uppfattning, presterar bättre på aritmetiska test än elever med logaritmisk uppfattning. Ramani och Siegler (2008) utgår ifrån att en ökad säkerhet då det gäller linjära representationer tycks spela en central roll vid utvecklingen av numerisk förmåga. De visar i en studie hur förskolebarn genom att spela linjära brädspel under en tvåveckors-period ökar sina resultat i tester som mäter förmågan att räkna, placera ut tal på en tallinje, jämföra storlek på två tal samt att benämna tal (Ramani & Siegler, 2008). Även Ebersbach m.fl. (2008) har studerat hur elever i olika åldrar förstår tallinjen. I en studie med cirka 80 elever visade det sig att ett karaktäristiskt tillvägagångssätt för elever i tredje skolåret med god matematisk förmåga var att dela in tallinjen i nya, mindre delar för att på så sätt få fler referenspunkter att förhålla sig till. Denna strategi kallas "decomposition" (Ebersbach m.fl., 2008).

Kinard & Kozulin (2012) nämner också tallinjen som ett av de mest framstående matematiska tankeredskapen som eleverna behöver för att organisera och samordna de matematiska tankesystemen (s. 6). De menar att man bör undervisa om denna representation av talföljd och samband mellan helhet och del, med syfte att

eleverna ska skapa en inre bild av detta tankeredskap.

Gemensamt för dessa forskningsstudier är att tallinjen dels kan utgöra en viktig representationsform, dels vara ett redskap för matematiskt tänkande. Det är därför viktigt att undervisa om tallinjens konstitution i syfte att eleverna ska utveckla kunskaper i att använda redskapet. Vidare bör eleverna ges möjlighet att utveckla förståelse för proportionalitet och förståelse för förhållandet mellan del och helhet. Även att ett givet avstånd alltid representerar samma värde oavsett var på tallinjen det läses av, är nödvändig kunskap. Några studier beskriver också hur man kan träna upp elevers linjära förståelse.

Tallinjen i tidigare Learning study

Då vi i denna studie är intresserade av att utforska vilka kritiska drag som kan vara av betydelse för att elever ska förstå och använda tallinjen har vi försökt hitta tidigare Learning study som berör tallinjen. Andra skolors rapporter har främst sökts i den bas som finns vid Göteborgs universitet, samt på plattformen Learningstudy.se. Ett fåtal studier som behandlar tallinjen har varit aktuella som bakgrund.

I en studie i skolår 6 var avsikten att ge eleverna möjlighet att erfara att det finns oändligt många decimaltal i ett intervall mellan två decimaltal (Kullberg, 2004). De kritiska aspekter som lyftes fram som avgörande var:

- **Olika former av rationella tal.** Med det menas olika sätt att uttrycka decimaltalen som i olika bråkform och procent.
- **Del-helhets förhållandet.** Med det menas att man kan ta (andelen) noll komma nittiosju av (helheten) något till exempel linjalen. (Kullberg, 2004)

Tallinjen i form av en meterlinjal, användes som redskap i undervisningen för att synliggöra del-helhetsaspekten. Genom att låta längdenheten en meter, utgöra helheten och därefter visa delarna i form av decimeter, centimeter och millimeter, kunde eleverna urskilja denna aspekt. Tal i decimalform och deras placering på tallinjen jämfördes med längdenheternas inbördes relation. De elever som erfor de rationella talens uttryck (decimal-, procent eller bråkform) och del-helhets förhållandet samtidigt, svarade i eftertestet att det finns oändligt många decimaltal.

I en studie med 42 elever i skolår 2–3 på Gränsskolan i Haparanda var lärandeobjektet *att kunna placera ut naturliga tal på en tallinje, där inte alla värden är markerade och förstå att värdeskillnaden alltid är densamma, samt förklara sin strategi för att göra en korrekt tallinje* (Hansson, 2012). Nedan citerade kritiska aspekter behandlades i denna studie:

- En tallinje är en linje med tal, ej bara tal som står jämte varandra på en rad
- Förstå att pilen på tallinjen indikerar åt vilket håll värdet ökar
- Värdeskillnaden och avstånden mellan markeringarna på tallinjen måste vara lika stora
- Tallinjen kan starta från olika värden
- Tallinjen kan ha olika intervall, värdeskillnaden mellan markeringarna som till exempel 1, 3, 10, 20 ...

- Kunna sätta ut rätt avstånd mellan talen med hjälp av en strategi. Använda mittenvärdet mellan först start- och sluttalet och sedan mellan resterande tal. (Hansson, 2012)

Att arbeta med tallinjen kan ge lärare kunskap om elevernas uppfattning av talens storlek och talens förhållande till varandra visas i en studie med 78 elever i år 5 (Björk & Pettersson Berggren, 2012). Lärandeobjektet i denna studie formulerades till *Förmågan att använda tallinjen som ett redskap för att se relationer mellan heltal och decimaltal i talområdet -10 till 100*. Följande kritiska aspekter framkom:

- Nollans funktion som origo
- Hur absoluta och relativa värden skiljer sig åt
- Förhållandet mellan två referenspunkter visar tallinjens skala
- Tiondelars förhållande till heltal (Björk & Pettersson Berggren, 2012)

Elever som inte samtidigt kunde urskilja och använda sig av två referenspunkter hade svårt att placera ut tal korrekt på en tallinje. I stället för att förhålla sig proportionerligt till två angivna tal bestämde de sig i stället för ett "lagom" avstånd för värdet 1 och började vid noll och upprepade steget för att komma till ett önskat värde. Det kritiska draget *förhållandet mellan två referenspunkter* framträdde extra tydligt då eleverna skulle placera ut tiondelar och hundradelar på tallinjen. För att eleverna skulle observera de två värden som var utsatta, visade det sig effektivt att variera referenspunkterna mellan vilka eleverna skulle placera ut tal. När eleverna hade upptäckt de angivna referenspunkterna var nästa steg att få dem att erfara det värde som avståndet mellan dessa referenspunkter representerade. För att eleverna skulle uppfatta förhållandet mellan två referenspunkter fick de i uppgift att rätta till, ett i förhållande till två andra tal, felaktigt utsatt tal. Referenspunkterna varierades genom subtraktionsuppgifter (73 -68, 33 -26, 92 -87 och 42 -36) och eleverna fick formulera uppgifter med samma skillnad.

De tre refererade studierna pekar på vikten av att eleverna förstår sambandet mellan värde och avstånd, att tallinjen inte bara är en talrad utan att varje givet avstånd motsvarar ett bestämt värde. Att eleverna ska förstå att en tallinje kan beskriva olika delar av talsystemet, exempelvis 0 till 30, 40 till 100 eller 20 till 70, kan också ses som betydelsefullt.

Sammanfattningsvis ringar tidigare undersökningar och Learning study in ett intresseområde för en praxisnära forskning som drar nytta av lärares erfarenheter. Mot bakgrund av de i artikeln redovisade forsknings- och utvecklingsprojekten, framstår ett behov av vidare utveckling av undervisning som har till syfte att utveckla förståelse för tallinjens egenskaper och funktion som ett redskap för matematiskt tänkande.

Syfte och frågeställningar

Det övergripande syftet med denna studie är att undersöka vad som kan vara av betydelse för yngre barns förståelse av tallinjen. Frågeställningar för studien formulerades enligt nedan:

- Vad är kritiskt för yngre elevers förståelse av hur en tallinje kan vara uppbyggd?
- Hur kan en undervisning utformas med utgångspunkt från variationsteori för att eleverna ska ges möjlighet att utveckla en förståelse för tallinjen som redskap för matematiskt tänkande?

Teori och metod

Variationsteori

I en Learning study utgör variationsteori oftast det teoretiska ramverket (Marton, 2005). Variationsteorin, utvecklad under ledning av bland andra Ference Marton, vid Göteborgs Universitet, är sprungen ur fenomenografien, (Lo; 2014, Marton & Booth, 2000; Marton & Tsui, 2004). I den fenomenografiska ansatsen utgår intresset för hur människor erfar fenomen, från det teoretiska ställningstagandet att individens möjlighet till agerande står i förhållande till hur han/hon erfar olika fenomen (Marton & Booth, 2000).

Variationsteoretiska begrepp kan användas för att designa undervisning och undersöka hur undervisning kan utformas för att möjliggöra lärande (Marton & Pang, 2006). I många didaktiska forskningsstudier har variationsteori också använts för att lyfta fram och undersöka variationen i elevers sätt att urskilja definierande drag, exempelvis det "hundiga" hos en hund (jfr Lo, 2014). Utgångspunkten är att eleven måste uppfatta fler kritiska aspekter samtidigt, exempelvis storlek, färg och form för att förstå ett fenomen. Om vi exempelvis vill lära eleverna att känna igen en labrador måste de också urskilja att det finns olika raser. För att eleverna ska kunna uppfatta de kritiska dragen liten och mellanstor måste de också urskilja den kritiska aspekten storlek.

När barn kan urskilja fenomenet "röd" (det kritiska draget) måste de också ha urskilt "färg" (den relevanta kritiska aspekten). Det är omöjligt för någon att urskilja ett kritiskt drag utan att veta vilka kritiska aspekter det här draget tillhör. Kritiska drag och kritiska aspekter är oskiljbara (Lo, 2014, s 40).

Kritiska drag definieras som detaljer (stor, brun, labrador) som behöver urskiljas för att uppfatta en specifik egenskap (Lo, 2014). Dessa kritiska drag beskriver vilka värden denna egenskap kan anta. Innan vi kan bestämma hur vi ska undervisa om ett lärandeobjekt måste vi definiera både aspekter och drag som är kritiska för den aktuella elevgruppen.

Enligt ett variationsteoretiskt perspektiv ses alltså undervisning och lärande relaterade till varandra genom de möjligheter eleverna ges att urskilja mönster av variation hos de drag och aspekter som är kritiska för förståelsen av det aktuella lärandeobjektet (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Genom att erfara en lämplig variation är det möjligt att urskilja aspekter och drag. Med en sådan utgångspunkt blir det naturligt att vi förhåller oss till hur elever uppfattar kritiska aspekter och drag som är aktuella för ett visst lärandeobjekt och utforma undervisningen för att den ska ge den effekt

som vi önskar. Variationsteorin erbjuder därmed en vetenskaplig grund även för design av lektioner (Lo, 2014).

Studier har visat hur elever vars lärare systematiskt och medvetet använder mönster av variation i undervisningen, lyckas bättre än elever som deltagit i undervisning där man inte utformar undervisningen enligt ett medvetet variationsmönster (Lo, 2014). Vid design av undervisning kan mönster av variation användas för att eleverna ska ges möjlighet att erfara de kritiska aspekter och drag som är aktuella för lärandeobjektet.

Om ett kritiskt drag för att förstå tallinjen är förståelse för att skalan kan definieras med hjälp av två utsatta värden, skulle man exempelvis kunna visa eleverna två tallinjer. Den ena med endast ett tal utsatt och den andra med två tal (referenspunkter) utsatta. Om eleverna sedan får uppgiften att placera ut ett bestämt tal på bägge dessa linjer skulle en kontrastering av given skala/icke given skala uppstå. Det kritiska draget "skalan faller ut vid jämförelse av avståndet mellan två referenspunkter" framträder därmed. Genom att därefter variera skillnaden mellan två referenspunkter och låta eleverna placera ut ett tredje tal, kan en generalisering göras av hur avstånden mellan tal på en tallinje beror på skalan, vilken i sin tur faller ut beroende av värdeskillnaden och avståndet mellan två utsatta tal. Denna värdeskillnad kan liknas vid det enhetsintervall som Kilhamn (2014) beskriver som en av tallinjens egenskaper. Större intervall på en tallinje byggs upp av det avstånd som vi definierar som en hel (avståndet mellan 0 och 1). Detta enhetsintervall kan antingen multipliceras eller delas upp proportionerligt mot enhetsavståndet (Kilhamn, 2014).

Vid en undervisning som bygger på ett variationsteoretiskt lärandeperspektiv kan också elevers felaktiga uppfattningar, som kommer till uttryck i klassrummet användas för att kontrastera, och därmed framhäva de kritiska drag som man vill att eleverna ska uppfatta. För att behärska ett lärandeobjekt krävs det ofta att individen är medveten om och kan hantera fler kritiska drag samtidigt och även förstå hur dessa relaterar till varandra. Genom ett mönster av variation där man samtidigt varierar fler av de kritiska dragen, möjliggör man för eleverna att erfara och förhålla sig till dessa samtidigt.

I de Learning study vi refererar till, används inte begreppet kritiska drag utan endast kritisk aspekt. I det följande särskiljer vi dock de båda begreppen. För vidare läsning om dessa rekommenderas den svenska översättningen av boken Variationsteori – för bättre undervisning och lärande (Lo, 2014).

Metod

En Learning study har genomförts av fyra matematiklärare och studiens två författare. Tre försökslektioner har genomförts enligt den cykliska process som modellen föreskriver. I avsnittet om Genomförande och resultat kan man följa de olika steg som tagits för att förbättra undervisningen kring det valda lärandeobjektet. För vidare läsning om Learning study och variationsteorin rekommenderas Lo (2014), Maunula, Magnusson och Echevarría (2011) och Holmqvist (2006).

I utforskandet av det aktuella lärandeobjektet har tidigare studier och forskningsar-

tiklar inventerats i syfte att utröna vilka kritiska drag och aspekter som skulle kunna vara aktuella även för våra elever. Tillsammans med deltagande lärare har ett förtest utformats för att pröva vilka aspekter som var kritiska för den aktuella elevgruppen i relation till det avgränsade lärandeobjektet. Lärare och handledare har läst tidigare studier och utgått från både däri beskrivna kritiska aspekter, egna erfarenheter samt kunskaper om den aktuella elevgruppen vid utformandet av detta förtest. Vid planering av lektionerna har resultaten på förtestet använts för att bestämma vilka kritiska drag som behövde synliggöras. Lektionerna har planerats med utgångspunkt från att dessa kritiska drag skulle varieras för att synliggöras. Elevernas utsagor har vidare analyserats genom videofilmning, ljudupptagning, intervjuer och skriftliga tester både före och efter de undervisningstillfällena som planerats enligt Learning study-processen. Analys av filmmaterial, för- och eftertester samt planering av lektionerna har gjorts tillsammans med den aktuella lärargrupp som deltog i studien. Varje lärare har ägnat cirka 25 timmar åt detta gemensamma arbete, under terminen.

Genomförande och resultat

Studien gjordes i skolår 2 med 50 elever höstterminen 2013. Lärandeobjektet formulerades som *förmågan att uttrycka heltalsvärden i talområdet 0–100 med hjälp av den grafiska representationsformen tallinje*. Eleverna hade tidigare mött och arbetat med tallinjer i läromedel och annan undervisning.

För att kunna utforma ett förtest gjordes en innehållslig analys av lärandeobjektet, vad man kan när man kan förstå och använda tallinjen. En inventering av lärarnas erfarenheter jämfördes med andra studiers resultat för att utröna vad som skulle kunna vara kritiskt för elevernas förståelse. Detta gav vid handen att *förhållandet mellan värde och avstånd* är centralt, till exempel att en punkt på tallinjen både representerar ett tal i förhållande till andra tal och samtidigt ett värde, samt att ett avstånd motsvaras av en värdeskillnad. Det innebär också en insikt om att tallinjen kan hanteras på annat sätt än talramsans, nämligen att den är anpassningsbar vad gäller talomfång, längd och avstånd mellan markeringar, man kan själv välja vilken del av tallinjen som visas och i vilken skala, det vill säga *talomfång* kan varieras beroende på uppgift. Med talomfång menas här den del av en tallinje som begränsas av de lägsta och högsta markerade talen. Talområde används ofta i läromedel för att ange en viss mängd av tal, mellan vilka undervisningen sker, exempelvis 0–10, 0–100. I denna text används begreppet på det viset, alltså för att ange de lägsta och högsta tal som eleverna förväntas uppfatta och hantera.

Vi diskuterade erfarenheter av elevers uppfattning om att det finns en redan på förhand bestämd steglängd och att en tallinje alltid startar vid noll. I Gränsskolans studie i år 2–3 (Hansson, 2012) beskrivs liknande erfarenheter, det är av vikt att elever uppfattar att tallinjens intervall kan vara olika stora. Aster och Shalev (2007) skriver också om vikten av att förstå sambandet mellan värde och avstånd. Häri ingår förståelsen för en linjär representation av värden, tallinjen är inte bara talramsans på en linje, "ej bara tal som står jämte varandra på en rad" (Hansson, 2012).

I förtestet fick eleverna i uppgift att sätta ut tal på tallinjer med olika startpunkter

och talomfång i talområdet 0-100. Några uppgifter bestod i att förklara vad som var fel och varför samt att avgöra vad som behövs för att kunna sätta ut ett tal där bara en punkt var markerad. Med detta ville vi pröva de förmodade kritiska dragen *förhållandet mellan värde och avstånd* och *olika talomfång och längd*.

Analys av förtest och några intervjuer visade att många av elever hade uppfattningen att det finns ett "lagom långt steg" mellan två heltal, ett fixt avstånd. De stegar med fingret eller pennan från det lägsta talet och tar inte hänsyn till de högre tal som finns till höger. Vi fann det vara kritiskt att det finns *ett samband mellan värdeskillnad och avståndsskillnad på tallinjen*. En del elever ser läsriktningen som en riktning även för arbetet med uppgiften, de har svårt att sätta ut ett tal lägre än det lägsta angivna talet, de kan alltså inte placera talet 7 om 10 och 15 är de tal som finns utsatta. Många är också beroende av att sätta ut alla heltal i det aktuella talområdet och uppfattar att 0 alltid ska finnas längst till vänster. Dessa elever hade ännu inte urskilt att det talområde som visas med hjälp av tallinjen kan anpassas efter vilka tal man vill jämföra, *att tallinjen kan ha olika omfång*.

Några elever uttryckte att det finns osynliga tal och beskrev det som till exempel två-hopp eller fem-hopp. Det verkade också vara mer komplext att dela upp ett givet avstånd än att upprepa detta avstånd som ett steg. Om 7 och 15 är referenspunkter var det fler elever som upprepar detta avstånd i stället för att dela upp det för att sätta ut ett tredje tal. Vi bedömde att skalbegreppet var viktigt att förstå för att kunna använda en tallinje som grafisk representationsform, att kunna *avgöra skalan på en tallinje med hjälp av två referenspunkter*.

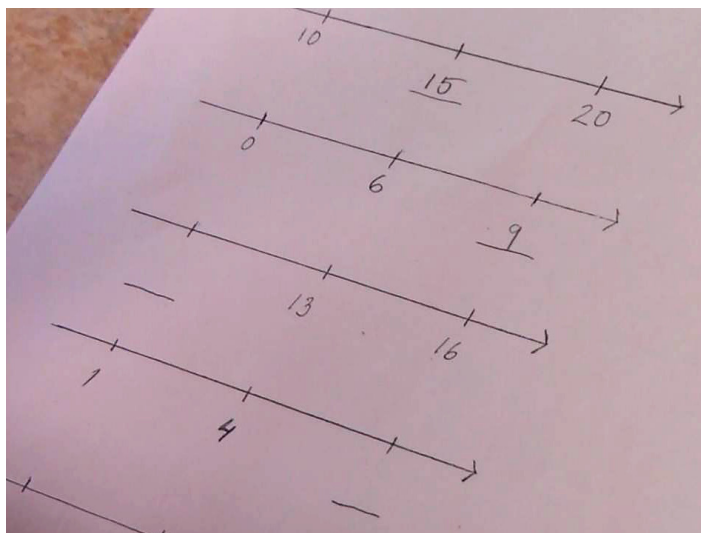


Bild 1. Exempel från förtest där en elev upprepar talramsar 3, 6, 9 utan att uppmärksamma att de givna referenspunkterna 0 och 6 ger en skala att förhålla sig till.

I lektion 1 varierades *längd på tallinjen och talomfång* (0-20, 15-75). Eleverna fick diskutera vad som var rätt och fel i några olika exempel. Genom att kontrastera en längre tallinje där 3, 6 och 9 var markerade, med en kortare linje där 30, 60 och 90 fanns utsatta, var avsikten att eleverna skulle erfara skalbegreppet och möjligheten att visa

olika delar av en oändlig tallinje, samt också att steg inte alltid betyder ett heltal. Här blev vi varse att stegtänkandet och begrepp som osynliga tal kanske leder fel och mot en statisk uppfattning om avstånd. En del elever tittade snabbt på tallinjen med 30, 60 och 90 markerade och märkte ut 40 och 50, "det är tjugo emellan". De gjorde inte skillnad på avstånd och punkter på tallinjen. Det kritiska draget om förhållandet mellan *värdeskillnad* och *avståndsskillnad* framträdde inte tydligt för eleverna. Analysen av eftertestet och lektionen visade också att eleverna inte givits möjlighet att urskilja att det behövs två referenspunkter för att avgöra tallinjens skala.

Lektion 2 fokuserade därför istället på relationen mellan *värde* och *avstånd* samt möjligheten att erfara *skala genom att läsa av två referenspunkter*. Läraren visade en tallinje med endast en punkt markerad och tre olika lösningar på hur man kunde sätta ut ett andra tal. Denna variation blev inte tydlig, alla svar blev möjliga, men att det berodde på avsaknaden av en andra referenspunkt framträdde inte klart. Eleverna fick också uppgifter där *tallinjens längd varierade men talomfånget var konstant*, samt där talområdet varierade och längden hölls konstant. Många elever hade fortfarande uppfattningen om ett lagom steg och kunde inte urskilja förhållandet mellan två referenspunkter som avgörande för skalan.

I lektion 3 varierades därför först tallinjer med en och två referenspunkter för att eleverna skulle erfara att det behövs två referenspunkter för att avgöra skalan och kunna sätta ut ett tredje tal. Till en början hade vi sett det som kritiskt att erfara att längd och talområde kan variera, men i denna lektion fokuserades istället förhållandet mellan referenspunkterna som en utveckling av detta tidigare kritiska drag. Olika lösningar visades, avstånd och värde jämfördes som skillnad och en diskussion fördes om denna relation. För att få en kraftfull variation varierades korrekta lösningar även med felaktiga.

Eleverna fick också parvis sätta ut ett tredje tal, mellan två referenspunkter, ett lägre tal än dessa eller högre för att *förhållandet mellan del och helhet* skulle kunna

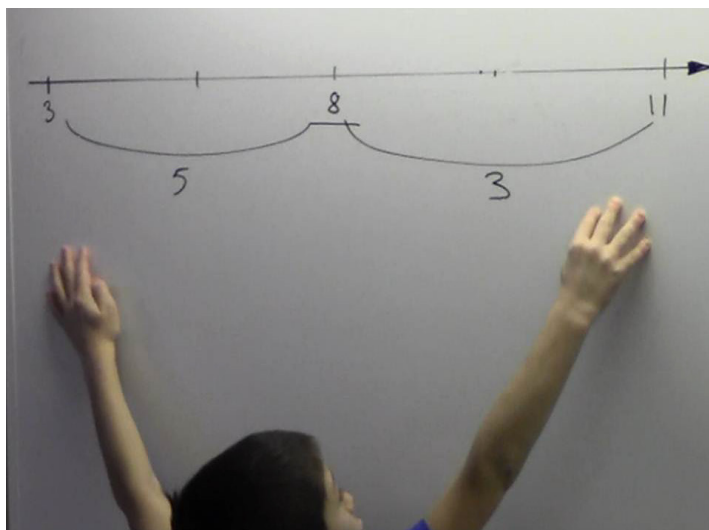


Bild 2. Från Lektion 3, diskussion om förhållandet mellan del och helhet. Bilden visar hur en elev rättar till felaktigt placerade tal.

urskiljas. Många elever hade tidigare bara upprepat ett steg eller bara förhållit sig till en tänkt nollpunkt. I tidigare studier har förhållandet mellan del och helhet skrivits fram som en kritisk aspekt (Kullberg, 2004; Björk & Pettersson Berggren, 2012). I elevernas uppfattningar om lagom steg och olika typer av hopp, såg vi likheter med till exempel den statistiska uppfattning om tiondelars och hundradelars förhållande till det hela som beskrivits i dessa studier. Detta anknyter också till förmågan att dela upp ett avstånd i mindre delar som lyfts fram av Hansson (2012) och även Ebersbach m.fl., (2008) vilka använder begreppet *decomposition* för denna förmåga. Vi fann att denna lektion gav eleverna möjlighet att urskilja de kritiska dragen samtidigt och resultaten förbättrades påtagligt.

Variationsmönster

Referenspunkternas antal varierades för att eleverna skulle urskilja att en punkt inte räcker för att avgöra skala, att om man har två punkter kan man sätta ut fler tal och tre punkter är mer än tillräckligt.

Den variation som visade sig ha störst betydelse var kontrastering av referenspunkternas placering i förhållande till de tal som skulle uttryckas. I en uppgift där talen 8 och 15 var angivna och eleverna ombads sätta ut ett tal till, kunde en del elever upprepa skillnaden 7 och satte ut talet 22 eller kunde dela upp skillnaden och placera ut talen 11 eller 12. I båda fallen räknade de ut skillnad men att kunna dela upp skillnaden och sätta ut nya referenspunkter mellan de angivna punkterna ansåg vi vara en högre kvalitet i förståelsen. Då eleven kan göra denna uppdelning i stället för att upprepa ett redan fastslaget avstånd för att sätta ut ett nytt värde visar det att eleven lämnat stegtänkandet och förhåller sig till del och helhet. Med de nya värden som markeras uppstår nya helheter som kan delas upp vidare.

Tabell 1. Variationsmönster

Kritiska drag	Lektion 1	Lektion 2	Lektion 3
Tallinjen kan ha olika omfång	Varieras	Varieras	Varieras ej
Samband avstånd – värde. Avståndsskillnaden mellan två punkter representerar ett värde.	Varieras ej	Varieras	Varieras
Två referenspunkter behövs för att avgöra skalan	--	Varieras	Varieras
Förhållandet mellan del och helhet	--	--	Varieras

Förbättringar i elevernas prestationer

Efter lektion 3 förbättrades resultaten avsevärt. Fler elever kunde urskilja att avståndet mellan två givna tal på tallinjen motsvarades av en värdeskillnad och placera ut ett tredje tal i förhållande till dessa. Vi tolkade detta som att eleverna nu kunde urskilja referenspunkternas betydelse eftersom dessa varierades på ett mer systematiskt sätt. Några av eleverna hade fortfarande en tendens att stega och att sätta ut noll, men det var långt färre som gjorde så. I de första två lektionerna var det många elever som gjorde ett lagom steg när de skulle sätta ut ett tredje tal, de förhöll sig inte till del och helhet, utan mättade steg med fingret eller pennan ”det brukar vara så här långt”. Den stora skillnaden uppfattade vi som att eleverna efter lektion 3 läste referenspunkter *både* till höger och vänster och alltså förhåller sig till del och helhet.

I lektion 3 släpptes omfång som kritiskt drag, här varierades skalan och referenspunkterna på ett kraftfullt sätt och vi bedömde att tallinjens omfång inte då var ett enskilt kritiskt drag för eleverna. Då vi i lektion 3 även kontrasterade en punkt mot fler, framträdde nödvändigheten av två referenspunkter tydligare för eleverna.

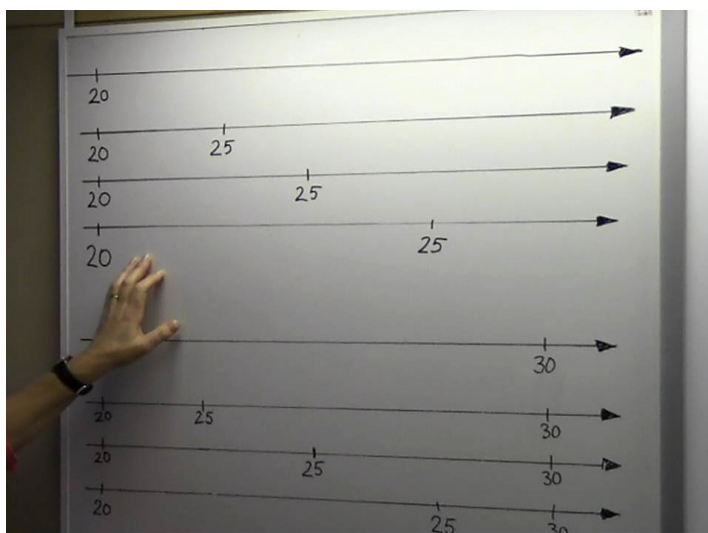


Bild 3. Från lektion 3. Kontrastering av "en referenspunkt – två referenspunkter" samt "del och helhet".

Sammanfattande resultat och analys

I denna del sammanfattas resultaten i relation till forskningsfrågorna och analyseras i relation till tidigare forskning. Fyra kritiska drag för yngre elevers förståelse av hur en tallinje kan vara uppbyggd har fastställts i studien: *Att tallinjen kan ha olika omfång* (exempelvis 0–20 eller 30–60), *samband mellan värde och avstånd*, *att det behövs två referenspunkter för att placera ett tredje tal* och *att bestämma skala samt förhållandet mellan del och helhet*. Hur undervisningen kan utformas med utgångspunkt från variationsteori för att eleverna ska ges möjlighet att utveckla en förståelse för tallinjen som redskap för matematiskt tänkande, redovisas under varje kritiskt drag. Här följer också en jämförelse av dessa kritiska drag med den forskning vi tidigare redogjort för och resultat från de Learning study vi tagit del av.

Tallinjen kan ha olika omfång

Många av våra elever hade, liksom jämnåriga elever på Gränsskolan (Hansson, 2012), inte urskilt att en tallinje kan ha olika omfång, det vill säga att talområde och avstånd mellan markeringar kan variera. Fler elever markerade alla heltal med start på noll eller försökte anpassa tallinjen efter ett intervall på till exempel 0–20 genom att förlänga linjen eller tränga ihop tal. Studien i Gränsskolan undersökte hur elever kunde placera ut tal på en tallinje där inte alla heltal är markerade. Där anges två av de kritiska aspekterna som att uppfatta att *tallinjen kan starta från olika värden* samt att *tallinjen kan ha olika intervall mellan markeringar*. I lektion 1 i vår studie, varierades längd och talomfång av tallinjer, men det är rimligt att anta att variationen borde vara mer kraftfull. Eleverna bör få möta mycket långa och mycket korta tallinjer som inte begränsas av arbetsbladets eller tavlans storlek. Både skolgård och idrottshall kan utnyttjas för att visa olika talomfång och göra kontraster mellan lång tallinje med litet talomfång och kort tallinje med stort talomfång. Arbete med tallinjen medger ju också att talområdet utvidgas till höga tal, negativa tal samt tal i decimalform, för att eleverna ska erfara relationer mellan tal.

Samband mellan värde och avstånd

Både i denna studie och i studien i år 5 (Björk & Pettersson Berggren, 2012) använde fler elever talet noll som startpunkt och stegade sig fram till det tal de skulle sätta ut, utan att förhålla sig till det tal som var utsatt till höger (det högre talet). Vi uppfattade att dessa elever rytmiskt översatte räkneramsan till tallinjen med ett på förhand bestämt intervall. När dessa elever nådde fram till det högra talet började de sudda och flytta på talen för att på så sätt försöka anpassa intervallen till den givna sträckan. Elever uttryckte sin förståelse genom utsagor som "det brukar vara så här långt" eller "jag tar pyttesteg med pennan för det är så kort". Värde och avstånd kopplas inte ihop, talen är fixa steg på rad i läsriktningen. Först när skillnad i avstånd och värde varierades simultant blev det möjligt för eleverna att erfara talens värde i relation till avstånden. Även i Gränsskolans studie i skolår 2–3 försökte lärarna få eleverna att erfara hur avstånd och värde mellan talen förhöll sig genom att kontrastera en tallinje med korrekta respektive felaktiga avstånd mellan talen.

Det kritiska draget samband mellan värde och avstånd utvecklades under studien till ännu ett: *Två referenspunkter behövs för att sätta ut ett tredje tal och bestämma skalan*.

Två referenspunkter behövs för att bestämma skalan

I studien såg vi att det verkade lättare för eleverna att placera ut ett valfritt, tredje tal som en upprepning av skillnaden mellan de två första talen, än att arbeta i intervallet mellan de två givna talen. Detta gjorde oss uppmärksamma på att elever behöver erfara att den skala som kan avläsas med hjälp av två referenspunkter skapar möjligheter att sätta ut nya tal, inte endast att upprepa skillnaden. Eleverna fick en tallinje med talet 7 utsatt och ombads att sätta ut talet 15 samt ett valfritt annat tal. Vissa elever satte ut talet 8 och stegade sig sedan fram till 15, andra satte ut 15 och

upprepade avståndet för att komma till 23 och andra halverade avståndet för att sätta ut en mittpunkt mellan de givna referenspunkterna. Också för elever i år 5 var detta ett kritiskt drag (Björk & Pettersson Berggren, 2012) som där uttrycktes som två drag, nämligen *förhållandet mellan två referenspunkter samt tiondelars förhållande till heltal*.

Eleverna urskilde referenspunkternas betydelse när två markerade tal på en tallinje kontrasterades med ett markerat tal. Genom att förhålla sig till två tal blev det också tydligare att talen inte bara var rytmiska steg eller hopp, utan en relation som representerar en värdeskillnad.

Förhållandet mellan del och helhet

Betydelsen av att förstå värdeskillnad återkommer vad gäller förmågan att hantera förhållandet mellan del och helhet. Två olika uppfattningar kunde skönjas hos eleverna i studien, att dela upp ett avstånd på mitten eller att placera nästföljande tal i talramsans mycket nära det närmast lägre heltalet. Rimligtvis är det förra en strategi som bygger på enkelheten i att "ta hälften" medan det andra kan rymma ett stegtänkande, uppfattningen om ett fixt avstånd för heltalens placering. Då eleverna i år 5 ombads placera ut tal i decimalform på en tallinje framgick det tydligt att de hade svårt med delarnas förhållande till helheten (Björk & Pettersson Berggren, 2012). Det handlade då om förhållandet mellan tiondelar och heltal, där eleverna kunde halvera ett avstånd och således placera exempelvis 3,5 korrekt men inte 3,2. Även en studie i skolår 6 (Kullberg 2004) har visat betydelsen av att eleverna erfar hel-delhetsförhållandet i form av hur ett intervall mellan två tal kan delas in i ett antal delar, vad gäller tal i decimalform. Ebersbach m.fl., (2008) poängterar också denna förmåga. I vår studie var det av betydelse att eleverna kunde jämföra delen med helheten och att dessa delar varierade som skillnad, inte bara som hälften. Vid undervisning om tallinjen är det således viktigt att variera delens förhållande till det hela och med det möjliggöra att eleverna kan utveckla förmågan att använda sig av det som Ebersbach (2008) benämner "decomposition". Hansson (2012) beskriver i sin studie med i elever i skolår 2–3 först att det är en kritisk aspekt för elever att *kunna sätta ut rätt avstånd mellan talen med hjälp av en strategi*. Han anger senare i rapporten att denna kritiska aspekt borde strykas, eftersom det är en strategi som bara fungerar på vissa tillrättalagda tallinjer. Vi menar att förmågan att sätta ut nya tal genom att utgå från två intilliggande värden är något som eleverna utvecklar då de ges möjlighet att urskilja hur både avstånd-värde och del-helhet kan variera.

Betydelsen av att tidigt variera med andra decimaltal än sådana med 5 tiondelar och 25 hundradelar framstår för oss lika viktigt som att variera uppgifter där tal placeras på en tallinje enligt andra principer än regelbundna talserier.

Diskussion

En utgångspunkt för vår studie var att ta till vara tidigare forskning och andra skolors resultat för att fördjupa utforskandet av ett lärandeobjekt och dess kritiska aspekter. De drag vi har urskilt som betydelsefulla för förståelse av tallinjen stämmer till viss

del med erfarenheter från studier med liknande lärandeobjekt. Här följer en sammanfattande diskussion om våra resultat.

Learning study som beprövad erfarenhet

Under arbetet med studien har egna erfarenheter av vad som är kritiskt för våra elevers förståelse jämförts mot några studier från andra skolors. Vi har sett att vissa av de för våra elever kritiska dragen stämt överens med andra skolors erfarenheter, men har också upptäckt nya kritiska drag och konstaterat att variationsmönster kring dragen behövde utvecklas för att dessa skulle bli tydliga för våra elever. De studier som är rapporterade och finns tillgängliga är ett begränsat antal och vi är väl medvetna om att det kan finnas andra som vi inte hittat. Aspekter av tallinjen kan döljas i studier vars titel pekar på andra matematiska områden och det kan också ha tillkommit studier senare än vid det datum vi gjorde våra sökningar. Förhållandet mellan vad elever kan, vad de visar och hur detta kunnande tolkas i en studie, bör naturligtvis också kunna problematiseras. Samtidigt innebär läraryrket ett krav på ständig bedömning, ibland sker denna med mindre underbyggnad än i en Learning study där fler lärare reflekterar och diskuterar elevernas arbete.

Reliabiliteten i de rapporter som vi har använt kan diskuteras, ofta är de ganska knapphändigt beskrivna, har vidlyftiga lärandeobjekt, saknar vetenskapliga begrepp och förefaller inte möjliga att replikera. Att de aspekter som tas upp i rapporterna ibland liknar varandra kan bero på en gemensam, svensk undervisningstradition. Påfallande är dock att lärandeobjekten och innehållet i studierna alltid ligger nära undervisning och vår erfarenhet är att resultaten är intressanta också för lärare i andra ämnen. Vi tror att Learning study som modell skulle vinna mycket på att ha en bestämd form för vad som ska rapporteras. För att kunna bygga vidare på tidigare studier skulle vi önska att rapporterna innehöll en tydligare beskrivning av både lärandeobjektet, kring variationsmönster och hur de kritiska aspekterna har synliggjorts för eleverna. Vi ser också förbättringsmöjligheter både då det gäller inrapportering och tillgänglighet. Detta skulle skapa utvidgade möjligheter för lärare att arbeta kumulativt och därigenom närma sig kraven på att undervisning ska bygga på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet.

Tallinjen som tankeredskap

Mot bakgrund av den beskrivna studien ser vi att det finns ett antal kritiska drag som måste behandlas på ett medvetet sätt i undervisningen för att tallinjen ska fungera som ett redskap för matematiskt tänkande. Våra elever visade sig ibland ha för oss oväntade uppfattningar om tallinjens konstruktion som behövde utmanas genom kraftfulla variationsmönster.

Kinard & Kozulin (2012) lyfter betydelsen av att i undervisningen skilja på det matematiska innehållet och matematiska tankeredskap. De menar att det finns en risk att eleverna uppfattar redskapen som en del av innehåll och information i stället för ett redskap som stöd för resonemang och organisation av kunskapen. Vi menar att undervisningen bör separera tallinjen som redskap genom att medvetet variera de

kritiska dragen från uppgifter med ett rent innehållsligt fokus där eleverna exempelvis ska visa beräkningar på en tallinje. Elever behöver utveckla en säkerhet i att använda olika representationsformer (Lundberg & Sterner, 2009; McIntosh, 2008; Taflin, 2007). De mekaniska uppfattningar eleverna visat i studien då de tog för givet att de markerade platserna motsvarade en talrams (3, 6, 9) visar att det inte är helt tydligt för eleverna att en tallinje, precis som konkret tiobasmaterial, är en representation av talsystemet. Eleverna behöver, som von Aster & Shalev (2007) betonar, ges möjlighet att koppla ihop antal, visat med konkret material med tallinjens representation av tal som sträckor och punkter. Genom att kontrastera tallinjen mot andra representationsformer, som exempelvis tiobasmaterial kan det bli synligt för eleverna att tallinjen är ett matematikspecifikt redskap där tals relationer till varandra som del och helhet samt talföljd kan visas grafiskt. Representationsform kan i detta sammanhang ses som en kritisk aspekt vilken behöver lyftas parallellt med de kritiska drag som är aktuella för elevgruppen. Som Lo (2014) skriver är erfandet av aspekt, i detta fall representation, något som står i ett ömsesidigt förhållande till medvetenhet om de aktuella kritiska dragen. Vi konstaterar att vi i viss mån tagit för givet att eleverna uppfattat denna aspekt. På samma sätt som det kritiska draget "röd" är oskiljaktigt från den kritiska aspekten "färg" (Lo, 2014) menar vi att aktuella kritiska drag för tallinjen är oskiljaktiga från aspekten "representationsform".

Proportionalitet

Fler av de kritiska drag som vi har bearbetat hör samman med proportionalitet. Att ett tals värde förhåller sig proportionerligt till ett avstånd förutsätter en grundläggande insikt om del-helhetsrelationer. Vi har varseblivit i en tidigare studie om skala i år 5 (Björk & Pettersson Berggren, 2012), att elever ofta förhåller sig statistiskt till denna relation; skala, förstoring och förminskning ses som ett visst antal halveringar eller dubblingar. I arbetet med tallinjen som redskap för att erfara tals relationer, kan samma statistiska uppfattning skönjas när eleverna i år 5 arbetar med tal i decimalform. Bland de yngre eleverna finns också en tendens att uppfatta talsteg som ett förutbestämt avstånd. Vi menar att man genom en medveten variation av tallinjen vad gäller talområde och referenspunkter skulle hjälpa elever att urskilja skala och proportionalitet.

Undervisningstraditionen med att yngre elever mestadels arbetar inom ett lågt talområde med beräkningar, står inte, som vi ser det, i konflikt med att utveckla förståelse för del-helhetsrelationer i det decimala talsystemet som helhet. Därför menar vi att elever skulle ges större möjlighet att uppfatta talsystemets uppbyggnad om talområdet varierades mer, både med högre tal, andra intervall än 0–20 eller 0–100 samt även med tal i decimalform och negativa tal. På tallinjen kan tal i decimalform och negativa tal urskiljas som relationer till positiva heltal, ett samband som är flexibelt, till skillnad från mätningar och konkreta representationer där man använder sig av antalsräkning. Många områden inom matematik förutsätter en djupare förståelse av proportionalitet och vi drar slutsatsen att vår undervisning bör utvecklas i relation till detta. Det faktum att yngre elever ofta har en mer logaritmisk uppfattning av tal-

linjen än äldre (Berteletti m.fl., 2010; Booth & Siegler, 2008) skulle också kunna göra oss mer uppmärksamma på sådana uppfattningar och variera det kritiska draget proportionalitet med större noggrannhet för att eleverna ska erfara detta.

Undervisningstraditioner

Under studiens gång har vi blivit varse att en del undervisningstraditioner kan leda till missuppfattningar för eleverna. I arbetet med de yngre eleverna såg vi att övningar med rytmisk ramsräkning och talmönster överförda till tallinjen kan medföra en statisk uppfattning om tals representation. Eleverna använder utantillkunskap som räkneramsan eller 2-hopp, 5-hopp och 10-hopp för att finna ett visst tal på tallinjen. Vår erfarenhet är att elever kan översätta en talserie med jämna intervall till tallinjen, utan förståelse för att avstånden representerar specifika värden. De möter inte en variation av skala och talområde utan kan få uppfattningen att tallinjen alltid börjar vid noll, som vid inandningen då talramsans läses ut, och att ett heltalssteg är 1 cm långt, som det ju blir om talen 0–20 visas linjärt på en lärobokssida i A4-format. Vi uppmärksammade också att vi själva som lärare, använde begrepp som osynliga tal och talsteg, uttryck som ger en bild av tallinjen som en linjal med förutbestämda markeringar. Kinard & Kozulin (2012) beskriver just risken med att eleverna förväntas använda färdiga matematiska modeller på ett mekaniskt sätt. I det fall eleverna endast uppfattar tallinjer som talramsor översatta till en linje behöver de konfronteras med medvetet varierade uppgifter så att de kan urskilja tallinjens egenskaper och kunna använda dem som flexibla tankeredskap.

I en studie i år 5 (Björk & Pettersson Berggren, 2012) visar det sig att eleverna kände igen tallinjen från tidiga skolår men inte alltid kan använda den för beräkningar av subtraktion till exempel $63 - 7$ eller $63 - 58$. En studie om subtraktion med negativa tal i skolår 7 (Bergman m.fl., 2010) visade också att tallinjen som redskap för matematiska resonemang är ett viktigt undervisningsinnehåll även för äldre elever. Mellanstadielärovernas mekaniska sätt att placera ut en punkt halvvägs mellan två tal (Björk & Pettersson Berggren, 2012), påminner om hur de yngre eleverna i innevarande studie placerar ut tal utan att förhålla sig till helheten. Enligt vår uppfattning skulle elevernas förståelse för tal i decimalform gynnas om tallinjens proportionerliga uppbyggnad var ett fortsatt undervisningsområde även efter de första skolåren.

Enligt vår erfarenhet av tallinjer i läromedel är det sällan talområden högre än 0–100 som berörs vid uppgifter med tallinjer i de tidiga skolåren. Ofta får eleverna sina uppgifter på papper i A4-format, stående för en kort tallinje eller liggande för en längre. Boksidan eller arbetsbladets storlek begränsar bilden av tallinjens utsträckning i längd. I och med att det aktuella talområdet brukar vara 0–20 eller 0–100, drar eleverna slutsatsen att ett heltalssteg bör vara centimeterlångt på en tallinje som visar 0–20, medan en pennudd är lagom då det rör sig om tallinjer 0–100. Vi menar att variationen mellan höga, låga, negativa tal och tal i decimalform är nödvändig för att eleverna ska urskilja de kritiska dragen för tallinjen och att en medveten undervisning om tallinjen som redskap gynnar ett flexibelt matematiskt tänkande.

Referenser

- Bergman m.fl., (2010) *Learning study om begreppet skillnad vid subtraktion av ett negativt tal*. Stockholm: Sjöstadsskolan. [opublicerat manus]
- Berteletti, I., Lucangeli, D., Piazza, M., Dehaene, S. & Zorzi, M. (2010). Numerical estimation in preschoolers. *Developmental Psychology*, vol. 46, nr 2, ss. 545–551.
- Björk, M. & Pettersson Berggren, G., (2012) "0,5 är alltid i mitten" *En studie om förstågan att med tallinjen som redskap storleksordna och se relationer mellan heltal och decimaltal i talområdet -10 till 100*. Stockholm: Sjöstadsskolan. [opublicerat manus]
- Booth, J.L. & Siegler, R. S. (2008). Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning *Child Development*, July/August 2008, vol. 79, nr. 4, ss. 1016–1031.
- Carlgren, I. (2012). The Learning Study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, vol. 1, nr. 2, ss. 126–139.
- Ebersbach, M. m.fl. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5- to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, vol. 99, nr. 1, ss. 1–17.
- Göteborgs universitet (odaterad). Kunskapsbank för Learning study och Lesson study. Hämtad den 2013-09 12 från <http://ls.idpp.gu.se/>.
- Hansson, H. (2012) Tallinjen år 2–3, Gränsskolan, Haparanda. Hämtad den 2013-02-10 från http://Learningstudy.se/images/Tallinjen_Haparanda.pdf.
- Holmqvist, M. (red.) (2006). *Lärande i skolan – Learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur.
- Häggström, J., Bergqvist, M., Hansson, H., Kullberg, A. & Magnusson, J. (2012). *Learning study – en guide*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning.
- Kilhamn, C. (2014). Tallinjen som ett didaktiskt redskap. *Nämnan* 2014: 2.
- Kinard, J. T. & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt kunnande*. Lund: Studentlitteratur.
- Kullberg, A. (2004). *Tal, delar och oändlighet. En studie om avgörande skillnader i undervisning och lärande om decimaltal*. Fördjupningsarbete i pedagogik. Göteborgs universitet. Hämtad den 2013-02-15 från http://www.idpp.gu.se/digitalAssets/997/997766_Angelika_uppsats.pdf.
- Lo, M.L. (2014). *Variationsteori – för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur
- Lundberg, I. & Sterner, G. (2009) *Dyskalkyli – finns det? Aktuell forskning om svårigheter att förstå och använda tal*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs Universitet.
- Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik. Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur
- Malmer, G. (2010). *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur

Björk & Pettersson Berggren

- Marton, F. (2005). *Om praxisnära grundforskning*. I: Carlgren m fl: Forskning av denna världen II – om teorins roll i praxisnära forskning, Vetenskapsrådets rapportserie, rapport 4. Vetenskapsrådet, Stockholm.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On Some Necessary Conditions of Learning, *Journal of the Learning Sciences*, vol. 15, nr 2.
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui M. A. B. (2004). The space of Learning. I Marton, F & Tsui, M. A. B. *Classroom discourse and the space of Learning*. New Jersey: Erlbaum.
- Marton, F. & Tsui, A. B. (2004). *Classroom discourse and the space of Learning*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Maunula, T., Magnusson, J. & Echevarría, C. (red.) (2011). *Learning study – undervisning gör skillnad*. Lund: Studentlitteratur.
- McIntosh, Alistair (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. Göteborg: NCM
- Mullis, I.V.S. m.fl. (2012). *TIMSS 2011 international results in science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Ramani, G. B. & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, vol. 79, nr. 4, ss. 375–394.
- Taflin, E. (2007). *Matematiska problem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Diss. Umeå: Umeå Universitet, Institutionen för matematik och matematisk statistik.
- von Aster, M. G. & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, vol. 49, ss. 868–873.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Diss. Umeå: Umeå universitet.